



شنبه

۱۴۰۲/۱۲/۱۲



دوره جمع بندی دوینگ ماز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

دفترچه پاسخ ریاضیات

(جامع تابع / توابع نمایی و لگاریتمی - هندسه ۱ - آمار و احتمال)

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	محدثه شیخ علی	کاظم اجلالی - سوگند روشنی	رضا قانع - فرشاد حسنزاده

حق چاپ و تکثیر سوالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سوالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

اهمیت مبحث تابع و توابع نمایی و لگاریتمی در کنکور:

معرفی می‌کنم این شما و این هم دو تا از فصل‌های بسیار مهم کتاب، فصل تابع و فصل توابع نمایی و لگاریتمی.

این دو تا فصل از جذابترین و شیرین‌ترین فصل‌های ریاضی هستن، چون خیلی جمع و جور و خوش تست هستن و به قول اساتید هنر و سینما، فرم و محتوای خوبی دارن، خلاصه کمتر کسی توی این کره خاکی پیدا میشه که با این فصل‌ها حال نکنه.

چونم براتون بگه که از این دو تا فصل سرجمع حدود ۴ تا ۶ تست توی کنکور سوال میاد که واقعاً هر چقدر بخوان سختش کنن باز میشه حلشون کرد پس حواست باشه که توی سوال‌ها سوتی ندی و این تست‌ها رو مال خودت بکنی.

از مهمترین بخش‌های این دو تا فصل میشه به بخش‌های ویژگی‌های لگاریتم، معادله‌های نمایی و لگاریتمی، نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی، انتقال توابع، ترکیب و وارون توابع اشاره کرد. البته یادت باشه که خیلی از وقت‌ها از این دوتا فصل به صورت ترکیبی سوال میدن، مثلاً میان تابع لگاریتمی رو میبرن تو فاز انتقال توابع، پس مراقب باش که اخیراً رد پای سوال‌های ترکیبی، توی ریاضی هم مشاهده شده، پس بزن بریم که توی این آزمون کلی تست‌های خوب انتظارمون رو میکشه پس تا میتونی روی رسم نمودار توابع هم مسلط باش که توی حل خیلی از تست‌ها غوغا می‌کنه و کار رو برامون درمیاره!

پیش‌نیازهای مطالعه این بخش کدام مباحث هستند؟

با توجه به اینکه تابع مفهوم جدیدی است که در دوران دبیرستان با آن آشنا می‌شوید، بنابراین برای یادگیریش نیاز به مرور خاصی نیست. لگاریتم و توابع نمایی هم بخش جدیدی است که یک پیش‌نیاز مهم دارد و آن هم تابع است که ما خودمان آن را آورده‌ایم!

این بخش‌ها در کدام قسمت‌های دیگر کاربرد دارند؟

برای حل سوالات بخش حد و پیوستگی و مشتق نیاز مبرم به تسلط روی مباحث این دو فصل مخصوصاً فصل تابع دارید. پس به خوبی آن‌ها را یاد بگیرید.

از این بخش در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از چه موضوعاتی بوده؟

فصل تابع

۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۱ (دی)	۱۴۰۲
۲	۵	۴	۵	۴	۵
توابع صعودی و نزولی تابع وارون	انتقال توابع ترکیب توابع تابع وارون تابع وارون تابع وارون (ترکیب با تابع نمایی)	دامنه تابع رسم نمودار تابع جزء صحیح انتقال توابع انتقال توابع + تابع وارون	تابع ثابت انتقال توابع وارون تابع ترکیب توابع توابع صعودی و نزولی	توابع صعودی و نزولی انتقال توابع وارون تابع - ترکیب تابع دامنه تابع (ترکیب با تابع لگاریتمی)	انتقال توابع - دامنه تابع ترکیب توابع توابع صعودی و نزولی (ترکیب با لگاریتم) وارون تابع تعریف تابع به صورت زوج مرتبی

فصل لگاریتم و تابع نمایی

۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۱ (دی)	۱۴۰۲
۲	۳	۲	۲	۳	۳
معادله نمایی نمودار توابع لگاریتمی	ویژگی‌های لگاریتم نمودار توابع نمایی تابع نمایی (ترکیب با تابع وارون)	دامنه تابع لگاریتمی - معادله لگاریتمی معادله نمایی	قوانین لگاریتم نمودار توابع نمایی	ویژگی‌های لگاریتم دامنه تابع لگاریتمی (ترکیب با دامنه توابع) تابع نمایی	تابع لگاریتمی (ترکیب با توابع صعودی و نزولی) ویژگی‌های لگاریتم ویژگی‌های لگاریتم

پیش‌بینی شما برای کنکور بعدی چیست؟

با توجه به روند اخیر، پیش‌بینی می‌شود تعداد ۴ سوال برای بخش توابع و تعداد ۲ - ۳ سوال برای بخش لگاریتم و تابع نمایی داشته باشیم.

۱- چند عدد صحیح در مجموعه جواب‌های نامعادله $2^{x^2+1} \leq 4^{x+2}$ قرار دارند؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ (آسان - محاسباتی - ۱۱۰۳)

نامعادلات نمایان دیگر چه؟

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، آن‌گاه:

۱) $a > 1 : a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) > g(x)$

۲) $0 < a < 1 : a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow f(x) < g(x)$

پاسخ سریعی:

نامعادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2^{x^2+1} \leq 2^{2(x+2)} \Rightarrow x^2+1 \leq 2(x+2)$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0 \Rightarrow (x+1)(x-3) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$$

بنابراین اعداد صحیح $-1, 0, 1, 2, 3$ در مجموعه جواب‌های نامعادله قرار دارند.

گروه آموزشی ماز

۲- حاصل $(\log 2)^2 - (\log 5)^2 + (\log 25)$ کدام است؟

۱ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\log \frac{2}{5}$ (۲)

$\log \frac{5}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۳)

۲ تا ویژگی ساده و کاربردی از لگاریتم:

اگر $a, b, c > 0$ و $a, c \neq 1$ ، آن‌گاه:

۱) $\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b$

۲) $\log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b$

پاسخ سریعی:

$$(\log 2)^2 - (\log 5)^2 + \log 25 = (\log 2 + \log 5)(\log 2 - \log 5) + 2 \log 5 = \log 10 \cdot (\log 2 - \log 5) + 2 \log 5$$

$$= \log 2 - \log 5 + 2 \log 5 = \log 2 + \log 5 = \log 10 = 1$$

گروه آموزشی ماز

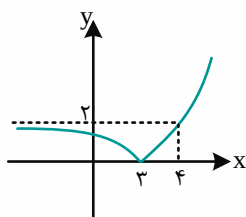
۳- نمودار تابع $f(x) = |a \times 3^{bx-1} + c|$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

$-\frac{2}{3}$ (۲)

$-\frac{1}{3}$ (۱)

$-\frac{1}{4}$ (۴)

$-\frac{3}{4}$ (۳)





چون $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ ، بنابراین $c = 2$ و در نتیجه $f(x) = |a \times 3^{bx-1} + 2|$ از طرف دیگر:

$$f(3) = 0 \Rightarrow a \times 3^{3b-1} + 2 = 0 \Rightarrow a \times 3^{3b-1} = -2$$

$$f(4) = 2 \Rightarrow |a \times 3^{4b-1} + 2| = 2 \Rightarrow \begin{cases} a \times 3^{4b-1} + 2 = 2 \Rightarrow a \times 3^{4b-1} = 0 \text{ غ قی} \\ a \times 3^{4b-1} + 2 = -2 \Rightarrow a \times 3^{4b-1} = -4 \end{cases}$$

$$\frac{a \times 3^{4b-1}}{a \times 3^{3b-1}} = \frac{-4}{-2} \Rightarrow 3^b = 2 \Rightarrow b = \log_3 2$$

$$a \times 3^{3b-1} = -2 \Rightarrow a \times \frac{3^{3 \log_3 2}}{3} = -2$$

$$\Rightarrow a \times \frac{3^{\log_3 8}}{3} = -2 \Rightarrow a \times \frac{8}{3} = -2 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

گروه آموزشی ماژ

۴- اگر α بزرگترین جواب معادله $\log_3^x + \log_4^x = 1$ باشد، مقدار $\alpha^{\sqrt{2}}$ کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

بچه‌ها ویژگی زیر هم خیلی تست فیزه!

اگر $a > 0$ و $b > 0$ و $a \neq 1$ ، $b \neq 1$ ، آن‌گاه: $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$



معادله را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\log_3^x + \log_4^x = 1 \Rightarrow \frac{1}{\log_3^x} + \frac{1}{\log_4^x} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\log_3^x + \log_4^x} + \frac{1}{\log_4^x + \log_3^x} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log_3^x + 1} + \frac{1}{2 \log_3^x + 1} = 1$$

با فرض $t = \log_3^x$ معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2t+1} = 1 \Rightarrow 2t+1+t+1 = (t+1)(2t+1)$$

$$\Rightarrow 3t+2 = 2t^2+3t+1 \Rightarrow 2t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\log_3^x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \log_3^x = \pm \sqrt{2} \Rightarrow x = 3^{\pm \sqrt{2}}$$

بنابراین:

$$\alpha = 3^{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha^{\sqrt{2}} = (3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 3^2 = 9$$

بنابراین:

گروه آموزشی ماژ

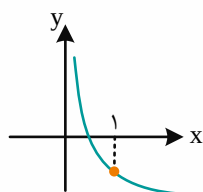
۵- نمودار تابع $f(x) = \log_2^{ax} - \log_3^x$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)





توجه کنید که $f(1) < 0$ ، پس:

$$f(1) = \log_1^a - \log_b^1 < 0 \Rightarrow \log_1^a < 0 \Rightarrow 0 < a < 1$$

$$f(x) = \log_1^{ax} - \log_b^x = \log_1^a + \log_1^x - \log_1^x \log_b^x = (1 - \log_b^x) \log_1^x + \log_1^a$$

از طرف دیگر:

چون نمودار تابع $y = \log_1^x$ صعودی است ولی نمودار تابع f نزولی است، پس باید $1 - \log_b^x$ عددی منفی باشد، بنابراین:

$$1 - \log_b^x < 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{\log_b^x} < 0 \Rightarrow \frac{\log_b^x - 1}{\log_b^x} < 0 \Rightarrow 0 < \log_b^x < 1 \Rightarrow 1 < b < 2$$

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ 1 < b < 2 \end{cases} \Rightarrow 1 < a + b < 3$$

بنابراین:

پس $a + b$ می‌تواند برابر ۲ باشد.

گروه آموزشی ماز

۶- اگر رابطه $y = \{(1, 2), (2, 4), (1, a+1), (2, 2b)\}$ تابع باشد، کدام رابطه زیر تابعی با دامنه $\mathbb{R}$ است؟

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = ab \quad (۴)$$

$$ax^2 = b + y^2 \quad (۳)$$

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} \quad (۲)$$

$$|x| + |y| = a - b \quad (۱)$$



توجه کنید که f تابع است. پس:

$$(1, 2) = (1, a+1) \Rightarrow a+1 = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$(2, 4) = (2, 2b) \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

بنابراین:

$$|x| + |y| = a - b \Rightarrow |x| + |y| = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

۱

این رابطه تابعی به صورت $\{(0, 0)\}$ است.

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{y} \Rightarrow y = 2x, x \neq 0$$

۲

این رابطه تابعی با دامنه $\mathbb{R} - \{0\}$ است.

$$ax^2 = b + y^2 \Rightarrow 2x^2 = 2 + y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2x^2 - 2}$$

۳

این رابطه تابع نیست، چون مثلاً به $x = 2$ مقادیرهای $y = \pm\sqrt{6}$ را نسبت می‌دهد.

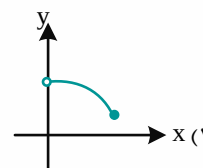
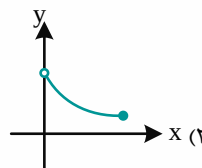
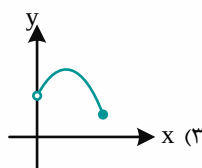
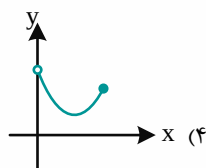
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = ab \Rightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 4 \Rightarrow y = 8 - x$$

۴

این رابطه، تابعی با دامنه $\mathbb{R}$ است. پس گزینه ۴ صحیح است.

گروه آموزشی ماز

۷- فرض کنید $f(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}$ و $h(x) = \sqrt{x}$. نمودار تابع $\frac{f \times h}{g}$ کدام است؟



اعمال جبری روی تابع رو خوب بلد باشید!

به طور کلی، اگر f و g دو تابع باشند، توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f \cdot g$ ، $\frac{f}{g}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x) & D_{f+g} &= D_f \cap D_g \\ (f-g)(x) &= f(x)-g(x) & D_{f-g} &= D_f \cap D_g \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) & D_{f \cdot g} &= D_f \cap D_g \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} & D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}\end{aligned}$$

پاسخ تشریحی:

ابتدا دامنهٔ توابع f و g را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \\ 3 - \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 3 \Rightarrow x \leq 9 \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g = [0, 9], \quad D_h = [0, +\infty)$$

$$D_{\frac{f \cdot h}{g}} = D_f \cap D_h \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = [0, 9] - \left\{x \mid \sqrt{\sqrt{x}+3} - \sqrt{3-\sqrt{x}} = 0\right\}$$

بنابراین:

$$\sqrt{\sqrt{x}+3} - \sqrt{3-\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3 = 3-\sqrt{x} \Rightarrow 2\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

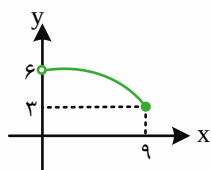
از طرف دیگر:

$$D_{\frac{f \cdot h}{g}} = [0, 9] - \{0\} = (0, 9]$$

بنابراین:

اکنون ضابطهٔ تابع $\frac{f \cdot h}{g}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f \cdot h}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)h(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{\sqrt{x}+3} + \sqrt{3-\sqrt{x}})}{\sqrt{\sqrt{x}+3} - \sqrt{3-\sqrt{x}}} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{\sqrt{x}+3} + \sqrt{3-\sqrt{x}})^2}{\sqrt{x}+3 - (3-\sqrt{x})} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3+3-\sqrt{x}+2\sqrt{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})})}{2\sqrt{x}} = \frac{6+2\sqrt{9-x}}{2} = 3 + \sqrt{9-x}\end{aligned}$$



بنابراین نمودار تابع موردنظر به صورت مقابل است.

گروه آموزشی ماز

$$8- \text{تابع } f(x) = \begin{cases} a & |x| > a \\ b & 0 < |x| \leq a \\ c & x = 0 \end{cases} \text{ با تابع } g(x) = \begin{cases} 2^{|x|} + 1 \\ 2^{|x|} - 1 \\ 2^{|x|} \end{cases} \text{ مقدار } a-b+c \text{ کدام است؟}$$

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

مگر دو تابع هم با هم برابر میشن!؟

۱) $f(x) = g(x)$ ۲) $D_f = D_g$

۲ تابع $f(x)$ و $g(x)$ را برابر گوئیم، هرگاه:

پاسخ تشریحی:

توجه کنید که:

$$|x| \geq 0 \Rightarrow -|x| \leq 0 \Rightarrow 1 - |x| \leq 1 \Rightarrow 0 < 2^{1-|x|} \leq 2^1 \Rightarrow 1 < 2^{1-|x|} + 1 \leq 3$$

بنابراین $\left[2^{-|x|} + 1\right]$ فقط می‌تواند ۱، ۲ یا ۳ باشد. پس a ، b و c باید مقادیر ۱، ۲ و ۳ را داشته باشند (لزوماً با ترتیب نوشته شده نیست) اکنون توجه کنید:

$$|x| > 1 \Rightarrow -|x| < -1 \Rightarrow 1 - |x| < 0 \Rightarrow 0 < 2^{1-|x|} < 2^0 \Rightarrow 1 < 2^{1-|x|} + 1 < 2 \Rightarrow \left[2^{1-|x|} + 1\right] = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = g(0) \Rightarrow \left[2^1 + 1\right] = c \Rightarrow c = 3$$

$$0 < |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -|x| < 0 \Rightarrow 0 \leq 1 - |x| < 1 \Rightarrow 2^0 \leq 2^{1-|x|} < 2^1$$

$$\Rightarrow 2 \leq 2^{1-|x|} + 1 < 3 \Rightarrow \left[2^{1-|x|} + 1\right] = 2 \Rightarrow b = 2$$

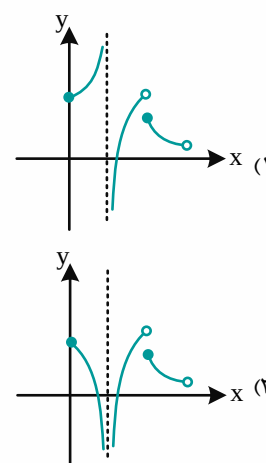
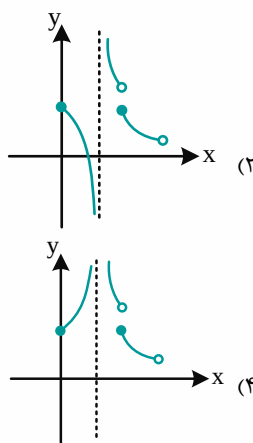
توجه کنید که چون $a = 1$ ، پس b را می‌توانید به صورت زیر هم به دست آورید.

$$\begin{cases} f(a) = f(1) = \left[2^1 + 1\right] = 2 \\ g(a) = g(1) = b \end{cases} \Rightarrow b = 2$$

در نتیجه: $a - b + c = 2$

گروه آموزشی ماژ

۹- نمودار تابع $f(x) = \frac{[x] - (-1)^{[x]}}{x - 1}$ با دامنه $\{1\} - [0, 3)$ کدام است؟



(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی:

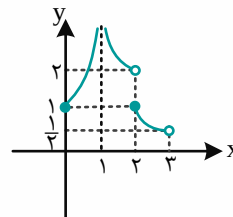
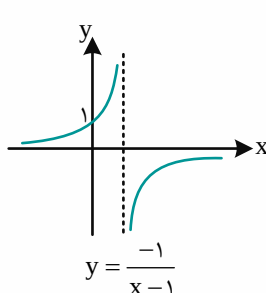
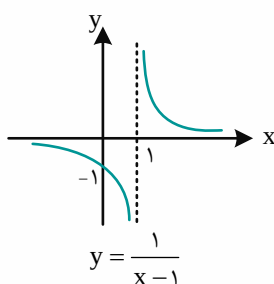
توجه کنید که:

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{0 - (-1)^0}{x - 1} = \frac{-1}{x - 1}$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1 - (-1)^1}{x - 1} = \frac{2}{x - 1}$$

$$2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{2 - (-1)^2}{x - 1} = \frac{1}{x - 1}$$

بنابراین، نمودار تابع f به صورت زیر رسم می‌شود:



تذکر: دقت شود که نمودار تابع $\frac{2}{x-1}$ مانند تابع $\frac{1}{x-1}$ است، فقط دارای انبساط عمودی با ضریب ۲ است.

● گروه آموزشی ماز ●

۱۰- نقطه $A(2, a)$ روی نمودار تابع $g(x) = 2f(x-1) + 3$ ، متناظر با نقطه $A'(b, 4)$ روی نمودار تابع $h(x) = -f(2x+3) + 1$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۸- (۴)

۷- (۳)

۴- (۲)

۵- (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی:

توجه کنید که: $g(x) = 2f(x-1) + 3$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=a \end{cases} \Rightarrow a = 2f(2-1) + 3 \Rightarrow f(1) = \frac{a-3}{2}$$

$$2x+3=1 \Rightarrow x=-1=b$$

$$h(x) = -f(2x+3) + 1$$

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow 4 = -f(1) + 1 \Rightarrow f(1) = -3 = \frac{a-3}{2} \Rightarrow a = -3$$

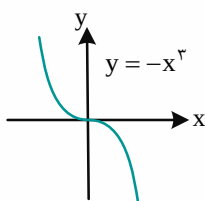
$$a+b = -4$$

از طرف دیگر:

بنابراین:

● گروه آموزشی ماز ●

۱۱- نمودار تابع $f(x) = x^3 - ax^2 + b$ را نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم. نمودار به دست آمده را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع g به دست آید. اگر نمودار تابع $y = g(x) - 3x$ به صورت مقابل باشد، مقدار $f(2)$ کدام است؟



۱۶ (۱)

۱۸ (۲)

۲۰ (۳)

۲۲ (۴)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ تشریحی:

به تبدیلات زیر توجه کنید:

$$y = f(x) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}} y = f(-x) \xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}} y = f(-(x+1)) = f(-x-1) = g(x)$$

بنابراین:

$$g(x) = (-x-1)^3 - a(-x-1)^2 + b = -x^3 - 3x^2 - 3x - 1 - ax^2 - 2ax - a + b$$

$$= -x^3 - (a+3)x^2 - (2a+3)x + b - a - 1$$

$$y = g(x) - 3x = -x^3 - (a+3)x^2 - (2a+6)x + b - a - 1 = -x^3$$

$$a+3=0 \Rightarrow a=-3$$

$$2a+6=0 \Rightarrow a=-3$$

$$b-a-1=0 \Rightarrow b=a+1=-2$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \Rightarrow f(2) = 8 + 12 - 2 = 18$$

در نتیجه:

● گروه آموزشی ماز ●

۱۲- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ را نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم، سپس آن را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع g به دست آید. نمودار تابع g چند نقطه مشترک با نمودار تابع وارونش دارد؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۳ (سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

بچه‌ها! نظرتون در مورد نحوهٔ به دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون چیه؟

برای به دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f ، در معادلهٔ $y = f(x)$ در صورت امکان، x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x ، $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

پاسخ سریعی:

به تبدیلات زیر توجه کنید:

$$y = \sqrt{x+2} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور طول‌ها}} y = -\sqrt{x+2} \xrightarrow{\text{یک واحد به پایین}} y = -\sqrt{x+2} - 1 = g(x)$$

اکنون ضابطهٔ g^{-1} را پیدا می‌کنیم.

$$y = -\sqrt{x+2} - 1 \Rightarrow \sqrt{x+2} = -y - 1 \Rightarrow x + 2 = y^2 + 2y + 1 \Rightarrow x = y^2 + 2y - 1 \Rightarrow g^{-1}(x) = x^2 + 2x - 1$$

اکنون باید معادلهٔ $g(x) = g^{-1}(x)$ را حل کنیم.

$$g(x) = g^{-1}(x) \Rightarrow -\sqrt{x+2} - 1 = x^2 + 2x - 1$$

$$x^2 + 2x = -\sqrt{x+2} \xrightarrow{\sqrt{x+2} = t \geq 0} (t^2 - 2)^2 + 2(t^2 - 2) = -t$$

$$\Rightarrow t^4 - 2t^2 + t = 0 \Rightarrow t(t^3 - 2t + 1) = 0$$

$$\Rightarrow t(t-1)(t^2+t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \Rightarrow x=-2 \\ t=1 \Rightarrow x=-1 \\ t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ t=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ غ قق} \end{cases}$$

بنابراین نمودارهای g و g^{-1} سه نقطه مشترک دارند.

● گروه آموزشی ماز ●

۱۳- اگر $f(x) = x^2 - x$ و $g(x) = 3 - x$ باشد، مجموع جواب‌های معادلهٔ $(fog)(x) = (gof)(x)$ کدام است؟

۱ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۳ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

یادآوری کنیم از فصل احسابان!

حاصل جمع ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ برابر $-\frac{b}{a}$ است.

پاسخ سریعی:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = g^2(x) - g(x) = (3-x)^2 - (3-x)$$

توجه کنید که:

$$= 9 + x^2 - 6x - 3 + x = x^2 - 5x + 6$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = 3 - f(x) = 3 - (x^2 - x) = -x^2 + x + 3$$

بنابراین معادلهٔ $(fog)(x) = (gof)(x)$ به صورت زیر است:

$$x^2 - 5x + 6 = -x^2 + x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 3 = 0$$

مجموع جواب‌های معادلهٔ بالا برابر ۳ است.

● گروه آموزشی ماز ●

۱۴- اگر $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ ، دامنه تابع $g(x) = \frac{1}{(f \circ f)(x)}$ کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - \{-1\}$
(۲) $\mathbb{R} - \{-1, 9\}$
(۳) $\mathbb{R} - \{-1, \frac{2}{3}, 9\}$
(۴) $\mathbb{R} - \{-1, \frac{2}{3}, 9\}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

اولین نکته در مورد دامنه است...

دامنه تابع $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ برابر است با: $D_g = D_f - \{x | f(x) = 0\}$

دومین نکته هم در مورد دامنه است:

دامنه تابع $h(x) = f \circ g(x)$ برابر است با: $D_h = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$

پس شریقی؟

$$D_g = D_{f \circ f} - \{x | (f \circ f)(x) = 0\} = \{x | x \in D_f, f(x) \in D_f\} - \{x | f(f(x)) = 0\} = \left\{x \mid x \neq -1, \frac{2x-3}{x+1} \neq -1\right\} - \left\{x \mid f(x) = \frac{3}{2}\right\}$$

$$\frac{2x-3}{x+1} = -1 \Rightarrow 2x-3 = -x-1 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} = \frac{3}{2} \Rightarrow 4x-6 = 3x+3 \Rightarrow x = 9$$

از طرف دیگر:

بنابراین:

$$D_g = \mathbb{R} - \left\{-1, \frac{2}{3}, 9\right\}$$

گروه آموزشی ما

۱۵- اگر $f(x) = x^2 + 2x - 1$ ، $D_f = [-3, 5]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ ، $D_g = [-1, 3]$ ، برد تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $[-2, 29]$
(۲) $[-2, 23]$
(۳) $[-2, 14]$
(۴) $[-2, 2]$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پس شریقی؟

ابتدا برد تابع g را حساب می‌کنیم:

$$g(x) = -x^2 + 4x \Rightarrow \text{رأس} = \frac{-4}{2(-1)} = 2 \quad -1 \leq x \leq 3$$

$$\begin{cases} g(-1) = -5 \\ g(3) = 3 \\ g(2) = 4 \end{cases} \Rightarrow R_g = [-5, 4]$$

$$D_f \cap R_g = [-3, 5] \cap [-5, 4] = [-3, 4]$$

اکنون توجه کنید که:

اکنون باید برد تابع f با دامنه $[-3, 4]$ را پیدا کنیم:

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 \Rightarrow \text{رأس} = -\frac{2}{2 \times 1} = -1 \quad -3 \leq x \leq 4$$

$$\begin{cases} f(-3) = 2 \\ f(4) = 23 \\ f(-1) = -2 \end{cases} \Rightarrow R_f = [-2, 23]$$

بنابراین: $R_{f \circ g} = [-2, 23]$

گروه آموزشی ما

۱۶- اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ و $(f \circ g)(x) = 2x$ ، معادله $(g \circ f)(x) = 2x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{5}$
(۲) $-\frac{6}{5}$
(۳) $\frac{2}{5}$
(۴) $-\frac{2}{5}$



$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow f(g(x)) = \frac{2g(x)-1}{g(x)+1} \Rightarrow (f \circ g)(x) = \frac{2g(x)-1}{g(x)+1}$$

توجه کنید که:

$$\Rightarrow \frac{2g(x)-1}{g(x)+1} = \frac{3x+1}{x-1} \Rightarrow 2(x-1)g(x) - (x-1) = (3x+1)g(x) + 3x+1$$

$$\Rightarrow (2x-2-3x-1)g(x) = 4x \Rightarrow g(x) = \frac{-4x}{x+3}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{-4f(x)}{f(x)+3} = \frac{-4 \cdot \frac{2x-1}{x+1}}{\frac{2x-1}{x+1}+3} = \frac{-8x+4}{2x-1+3x+3} = \frac{-8x+4}{5x+2}$$

بنابراین:

$$-8x+4=10x^2+4x \Rightarrow 10x^2+12x-4=0$$

$$\text{بنابراین باید معادله } 2x = \frac{-8x+4}{5x+2} \text{ را حل کنیم.}$$

مجموع جوابهای معادله بالا برابر $-\frac{6}{5}$ است.

گروه آموزشی ماژ

۱۷- توابع f و g با دامنه $\mathbb{R}$ مفروض‌اند. اگر تابع $h(x) = 4x^2 + 2f(x) + 3g(x)$ ، اکیداً صعودی و تابع $k(x) = 6x^2 + 3f(x) - 2g(x)$ اکیداً نزولی باشد،

کدام تابع روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است؟

$f - g$ (۴)

$f + g$ (۳)

g (۲)

f (۱)

نکات مهم توابع صعودی نزولی:

مجموع ۲ تابع صعودی $\leftarrow$ تابعی صعودی است.

مجموع ۲ تابع نزولی $\leftarrow$ تابعی نزولی است.



چون h اکیداً صعودی است، پس $3h$ هم اکیداً صعودی است.

چون k اکیداً نزولی است، پس $-2k$ اکیداً صعودی است.

بنابراین تابع $3h - 2k$ اکیداً صعودی است.

$$y = (3h - 2k) = 3h(x) - 2k(x) = 3(4x^2 + 2f(x) + 3g(x)) - 2(6x^2 + 3f(x) - 2g(x))$$

$$= 12x^2 + 6f(x) + 9g(x) - 12x^2 - 6f(x) + 4g(x) = 13g(x)$$

پس تابع g هم اکیداً صعودی است.

گروه آموزشی ماژ

۱۸- اگر $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (5, 0)\}$ و $g = \{(1, -2), (2, 0), (4, 1), (5, -4)\}$ ، کدام یک از توابع زیر یک‌به‌یک نیست؟

$\frac{g}{f}$ (۴)

$\frac{f}{g}$ (۳)

$f - g$ (۲)

$f + g$ (۱)

نمونه تشخیص یک‌به‌یک بودن تابع‌های زوج مرتبی روکی بلده؟

اگر تابع $f(x)$ به صورت زوج مرتب داده شده باشد، زمانی $f(x)$ یک‌به‌یک است که به ازای هر دو زوج مرتبی که دارای مولفه‌های دوم یکسان هستند، مولفه‌های اولشان نیز یکسان باشد.



$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{1, 2, 3, 5\} \cap \{1, 2, 4, 5\} = \{1, 2, 5\}$$

توجه کنید که:

بنابراین:

$$f + g = \{(1, 2-2), (2, 3+0), (5, 0-4)\} = \{(1, 0), (2, 3), (5, -4)\}$$

۱

$$f - g = \{(1, 2+2), (2, 3-0), (5, 0+4)\} = \{(1, 4), (2, 3), (5, 4)\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \{1, 2, 5\} - \{2\} = \{1, 5\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_f \cap D_g = \{x | f(x) = 0\} = \{1, 2, 5\} - \{5\} = \{1, 2\}$$

$$\frac{f}{g} = \{(1, \frac{2}{-2}), (5, \frac{0}{-4})\} = \{(1, -1), (5, 0)\}$$

$$\frac{g}{f} = \{(1, \frac{-2}{1}), (2, \frac{0}{3})\} = \{(1, -2), (2, 0)\}$$

بنابراین، فقط $f - g$ یک به یک نیست.

گروه آموزشی ماز

۱۹- نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+1}{5x+3}$ را یک واحد به سمت راست و یک واحد به سمت پایین انتقال می دهیم تا نمودار تابع g به دست آید. کدام یک دربارهٔ

مجموعهٔ نقاط مشترک نمودارهای g و f^{-1} درست است؟

(۴) نامتناهی است.

(۳) دو عضو دارد.

(۲) یک عضو دارد.

(۱) تهی است.

(متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ سریعی:

$$g(x) = f(x-1) - 1 = \frac{2(x-1)+1}{5(x-1)+3} - 1 = \frac{2x-2+1}{5x-5+3} - 1 = \frac{2x-1}{5x-2} - 1 = \frac{2x-1-5x+2}{5x-2} = \frac{-3x+1}{5x-2}$$

توجه کنید که:

$$y = \frac{2x+1}{5x+3} \Rightarrow 5xy + 3y = 2x+1 \Rightarrow x(5y-2) = -3y+1 \Rightarrow x = \frac{-3y+1}{5y-2}$$

از طرف دیگر برای محاسبهٔ تابع $f^{-1}(x)$ داریم:

$$f^{-1}(x) = \frac{-3x+1}{5x-2}$$

بنابراین نمودار تابع های f^{-1} و g بر هم منطبق است و مجموعهٔ نقاط مشترک آن ها نامتناهی است.

گروه آموزشی ماز

۲۰- اگر f و g توابعی وارون پذیر باشند و $f(\frac{x}{x-1}) = \frac{2g(x)}{1+g(x)}$ و $f^{-1}(3) = g^{-1}(-3) + 1$ ، مقدار $f^{-1}(3)$ کدام می تواند باشد؟

$$\frac{3-\sqrt{3}}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{3+\sqrt{3}}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad (۱)$$

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

دوستان ما زی عزیز، نکته های کارگشادر برخی سوالات وارون تابع:

گاهی در سوالات وارون توابع، به این نکته نیاز پیدا می کنیم که اگر $f(x)$ وارون پذیر باشد، آن گاه: $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$

پاسخ سریعی:

$$g^{-1}(-3) + 1 = m \Rightarrow g^{-1}(-3) = m - 1 \Rightarrow g(m-1) = -3$$

فرض کنید (۱) $f^{-1}(3) = m$ ، در این صورت:

$$\text{اکنون در تساوی } f(\frac{x}{x-1}) = \frac{2g(x)}{1+g(x)} \text{ قرار می دهیم: } x = m-1$$

$$f(\frac{m-1}{m-1-1}) = \frac{2g(m-1)}{1+g(m-1)} = \frac{2(-3)}{1+(-3)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$\Rightarrow f^{-1}(3) = \frac{m-1}{m-2} \quad (۲)$$

$$m = \frac{m-1}{m-2} \Rightarrow m^2 - 2m = m-1 \Rightarrow m^2 - 3m + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

از (۱) و (۲) نتیجه می شود:

رسیدیم به هندسه!!!

مازیا!!! حالتون چطوره؟

دو فصل دیگه کتاب هندسه رو اینجا با هم تحلیل می‌کنیم. تو فصل ۳ کتاب هندسه (۱) با چندضلعی‌ها روبه‌رو می‌شویم. در این فصل به صورت اختصاصی vip باید در مورد چندضلعی‌های معروف، نکته بلد باشیم. ما در همه این چندضلعی‌ها، دوست عزیزمون متوازی‌الاضلاع است. خواص متوازی‌الاضلاع خیلی زیاد نیست، ولی بلدش نباشید، مجبورید با ادامه فصل خداحافظی کنید.

بعد از متوازی‌الاضلاع و بچه‌هاش، باید روی دوزنقه هم مسلط بشید، چه متساوی‌الساقین و چه هر مدلی دیگر...

یادت نره در همه حرفایی که زدیم بحث مساحت هم مطرح هست. این موضوع بیشتر خودشو توی دوزنقه نشون میده عزیز جان! و اما فصل آخر کتاب، این فصل خیلی گنگوله و معمولاً هم یک تست در کنکور سراسری داره. توی این فصل حواست باشه که معمولاً سوالات به صورت گزاره‌ای طرح می‌شن. داشتن تجسم هندسی قوی یکی از برنده‌های این فصل محسوب می‌شه.

پیش‌نیاز مطالعه این بخش‌ها کدام مباحث هستند؟

برای اینکه خاطرت از پیش نیازهای این دو فصل جمع بشه، بهتره مرورکی روی فصل ۸ کتاب نهم داشته باشید. همچنین مباحث فصل ۲ کتاب هندسه (۱) هم توی اینجا بهش نیاز میشه.

این دو فصل در کدام قسمت‌ها کاربرد دارد؟

کاربرد فصل ۴ هندسه (۱) را می‌توان در فصل ۲ هندسه (۲) مشاهده کرد. همچنین فصل ۳ هندسه (۱) نیز در هر جای سوالات هندسه کاربرد دارند. چون دارند از چندضلعی‌ها و مساحت‌هایشان صحبت می‌کنند. مخصوصاً کاربرد این فصل در فصل ۱ هندسه (۲) مشهودتر است. از این بخش‌ها، در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال آمده است؟

۱۴۰۲	۱۴۰۱ (دی)	۱۴۰۱	۱۴۰۰	۱۳۹۹	۱۳۹۸
۳	۳	۲	۳	۵	۴
لوزی مستطیل و مساحت (ترکیب با فصل ۲ هندسه ۱) میان‌های مثلث و ویژگی‌های آن	تعداد قطر خط، نقطه و صفحه دوزنقه و مساحت آن (ترکیب با فصل ۱ هندسه ۲)	شش‌ضلعی و مساحت دوزنقه (ترکیب فصل ۱ هندسه ۲)	خط، نقطه و صفحه (ترکیب با فصل ۲ هندسه ۳) مساحت (ترکیب با فصل ۲ هندسه ۱) چهارضلعی‌ها و ویژگی‌های آن‌ها (ترکیب با فصل ۱ هندسه ۲)	چهارضلعی‌ها و ویژگی‌های آن‌ها (ترکیب با فصل ۱ هندسه ۱) دوزنقه و مساحت (ترکیب با فصل ۲ هندسه ۱) مساحت (ترکیب با فصل ۲ هندسه ۱) تفکر تجسمی	نسبت مساحت‌ها در دوزنقه (ترکیب با فصل ۲ هندسه) چندضلعی‌ها و ویژگی‌های آن‌ها (ترکیب با هندسه ۱ فصل ۲) خط و نقطه و صفحه تفکر تجسمی

پیش‌بینی شما برای کنکور سال آینده چیست؟

با توجه به روند سوالات در کنکور سال‌های گذشته، انتظار ۳ سوال را در کنکور پیش رو می‌توان داشت.

۲۱- در متوازی‌الاضلاع شکل زیر $\hat{A} = \hat{D}$ و E محل برخورد نیمسازهای $\hat{A}$ و $\hat{D}$ می‌باشد. اگر طول $BC = 8$ باشد، فاصله E از ضلع AD کدام است؟



- ۱ (۱)
۲ (۲)
۲/۵ (۳)
۳ (۴)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

یکی از خواص خوشگل متوازی‌الاضلاع:

در هر متوازی‌الاضلاع، زوایای مجاور مکمل‌اند.

این نکته در مورد مثلث قائم‌الزاویه خیلی معرک‌اس!

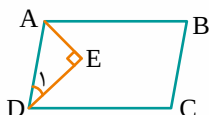
اگر در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، یکی از زاویه‌های حاده، ۱۵° باشد، آن‌گاه ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ وتر است.

پایخ شریعی

می‌دانیم در هر متوازی‌الاضلاع، زوایای مجاور مکمل‌اند. بنابراین:

$$\hat{A} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{D} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{D} = ۹۰^\circ, \hat{A} = ۹۰^\circ$$

همچنین چون AE و ED نیمساز هستند، بنابراین:



$$\hat{A}_1 + \hat{D}_1 = \frac{A}{2} + \frac{D}{2} = \frac{A+D}{2} = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{AED} = ۹۰^\circ$$

از طرفی، اگر در مثلث قائم‌الزاویه، یک زاویه ۱۵° باشد، ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{1}{4}$ وتر است. بنابراین، چون $\hat{D}_1 = ۱۵^\circ$ است، پس:

$$EH = \frac{1}{4} AD = \frac{1}{4} (8) = ۲$$

گروه آموزشی ما

۲۲- نیمسازهای داخلی مستطیلی به ابعاد ۸ و ۲ را رسم کرده‌ایم، چهارضلعی ایجاد شده است. مساحت بخشی از چهارضلعی که بیرون از مستطیل قرار گرفته است، کدام می‌باشد؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

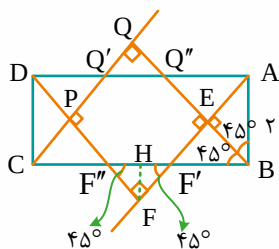
۸ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

پایخ شریعی

با توجه به شکل، تمام مثلث‌های قائم‌الزاویه ایجاد شده، متساوی‌الساقین هستند.



(۱) در مثلث $\triangle AEB$:

$$AE\sqrt{2} = 2 \Rightarrow AE = \sqrt{2} = BE = EF' \quad (۱)$$

(۲) در مثلث $\triangle AFD$:

$$AF\sqrt{2} = 8 \Rightarrow AF = 4\sqrt{2} \quad (۲)$$

اکنون با داشتن اضلاع مثلث $FF'F''$ ، مساحت آن را حساب می‌کنیم. دقت شود که با توجه به تقارن مسئله، مثلث $QQ'Q''$ نیز با مثلث $FF'F''$ هم‌نهشت است. پس:

$$(۱), (۲) \Rightarrow FF' = AF - AE - EF'$$

$$\Rightarrow FF' = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{2} = ۲\sqrt{2}$$

$$S_{\triangle FF'F''} = \frac{1}{2} \times ۲\sqrt{2} \times ۲\sqrt{2} = ۴$$

$$\Rightarrow ۴ + ۴ = ۸$$

$$S_{\triangle QQ'Q''} = \frac{1}{2} \times ۲\sqrt{2} \times ۲\sqrt{2} = ۴$$

۲۳- اگر در مثلث $\triangle ABC$ ، $BC=3\sqrt{2}$ ، $AB=6\sqrt{2}$ و $AC=3\sqrt{6}$ باشد، نسبت نیمساز زاویه B به میانه CM کدام است؟

$$\frac{2}{3}\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$3\sqrt{6} \quad (۳)$$

$$۲ \quad (۲)$$

$$\sqrt{3} \quad (۱)$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

و دوباره نکته‌ای در مورد مثلث قائم‌الزاویه:

در مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر، نصف وتر است.

پاسخ تشریحی:

اضلاع داده شده در رابطه فیثاغورس صدق می‌کنند. در نتیجه:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 \Rightarrow (6\sqrt{2})^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{6})^2 \Rightarrow ۷۲ = ۱۸ + ۵۴$$

$$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} = 30^\circ$$

برای به دست آوردن نیمساز BD کافی است در مثلث $\triangle BCD$ بنویسیم:

$$\sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{BD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{BD} \Rightarrow BD = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$$

$$CM = 3\sqrt{2}$$

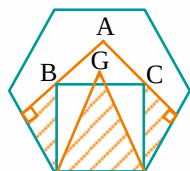
$$\frac{BD}{CM} = \frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

و می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است، بنابراین:

بنابراین نسبت نیمساز BD به میانه CM برابر است با:

گروه آموزشی ماز

۲۴- در شش ضلعی منتظمی به ضلع ۸ ، مربعی به صورت زیر قرار گرفته است. اگر G مرکز ثقل مثلث $\triangle ABC$ باشد، مساحت قسمت هاشورزده کدام است؟



$$\frac{32\sqrt{3}}{9} + 32 \quad (۲)$$

$$\frac{160\sqrt{3}}{9} + 32 \quad (۴)$$

$$\frac{12\sqrt{3}}{9} + 16 \quad (۱)$$

$$80\sqrt{3} + 16 \quad (۳)$$

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

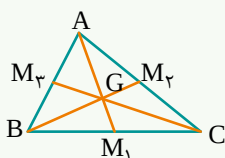
پاسخ: گزینه ۴

یک نکته ریاضی فیزیکی:

منظور از مرکز ثقل در مثلث، همون نقطه تلاقی میانه‌هاست.

یه نکته دیگه بگم و تمام:

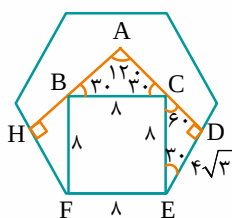
در هر مثلث میانه‌ها یکدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند. مثلاً در شکل زیر داریم:



$$2GM_1 = AG, \quad 2GM_1 = AM_1$$

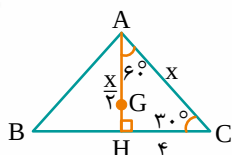
پاسخ تشریحی:

با توجه به توضیحات داده شده خواهیم داشت:



هر زاویه داخلی شش ضلعی منتظم 120° است و با توجه به اینکه در هر مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به 30° ، نصف وتر و ضلع روبه‌رو به 60° ، برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$

است، اندازه‌های مشخص شده به دست آمده است.



$$x^2 = \frac{x^2}{4} + 16 \Rightarrow \frac{3x^2}{4} = 16 \Rightarrow 3x^2 = 4 \times 16 \Rightarrow x\sqrt{3} = 2 \times 4 \Rightarrow x = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

در مثلث ABC داریم:

می‌دانیم AH میانه نیز می‌باشد و $GH = \frac{1}{3} AH$ ، در نتیجه:

$$GH = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \times \frac{8}{\sqrt{3}} \right) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$S_{\triangle GFE} = \frac{1}{2} \times 8 \times \left(\frac{4\sqrt{3}}{9} + 8 \right) = \frac{16\sqrt{3}}{9} + 32$$

$$\Rightarrow \text{هاشورزده } S = 2 \times (8\sqrt{3}) + \frac{16\sqrt{3}}{9} + 32 = \frac{160\sqrt{3}}{9} + 32$$

$$S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

تذکر: دقت شود که در مثلث CDE نیز اضلاع به روش استدلال بالا، (یعنی ضلع رو به زاویه 30° و 60°) به دست آمده‌اند.

گروه آموزشی ماز

۲۵- مساحت نه ضلعی شبکه‌ای ۳۱ است. مجموع تعداد نقاط درونی و مرزی آن چند عدد مختلف می‌تواند اختیار کند؟

۲۲ (۴)

۳۱ (۳)

۳۰ (۲)

۲۹ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

رابطه مساحت برای چندضلعی‌های شبکه‌ای چی بود؟

اگر b برابر تعداد نقاط مرزی و i برابر تعداد نقاط درونی باشد، آن‌گاه مساحت چندضلعی شبکه‌ای برابر است با: $S = \frac{b}{2} - 1 + i$

پایخ شیری:

می‌دانیم اگر b تعداد نقاط مرزی و i تعداد نقاط درونی چندضلعی شبکه‌ای باشد، مساحت آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1$$

$$\text{سوال: } \frac{b}{2} + i - 1 = 31 \Rightarrow \frac{b}{2} + i = 32 \Rightarrow b + 2i = 64$$

و با توجه به اینکه نقاط مرزی باید حداقل ۳ باشند، خواهیم داشت:

$$b \geq 3$$

b	۶۴	۶۲	۶۰		۴
i	۰	۱	۲		۳۰

در نتیجه ۳۱ حالت مختلف اتفاق می‌افتد.

گروه آموزشی ماز

۲۶- چه تعداد از گزاره‌های زیر درست هستند؟

- تنها شرط اینکه چهار نقطه در یک صفحه باشند، این است که خط‌های واصل هر جفت نقطه، با هم موازی باشند.
- هرگاه $d \in P$ و $d' \in P'$ بوده و دو خط d و d' با هم موازی باشند، دو صفحه P و P' نیز موازیند.
- هرگاه دو خط d و d' متنافر باشند، فقط یک خط وجود دارد که بر هر دو عمود باشد.

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

(متوسط - مفهومی - ۱۰۰۴)

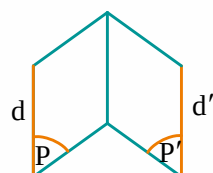
پاسخ: گزینه ۱

اینم یه نکته جذاب دیگه خدمت شما!

اگر d و d' دو خط متنافر باشند، آن‌گاه بی‌شمار خط وجود دارد که بر d و d' عمود است و تنها یک خط وجود دارد که هم بر d و d' عمود است و هم با آن‌ها متقاطع باشد که به آن عمودمشترک دو خط متنافر d و d' می‌گویند.

بررسی گزینه‌ها:

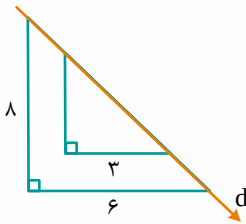
گزاره اول **نادرست** است، زیرا باید، خط‌های واصل هر جفت نقطه، موازی یا متقاطع یا بر هم منطبق باشند.
گزاره دوم **نادرست** است، زیرا نمی‌توان با اطمینان گفت که دو صفحه موازیند. به مثال نقض زیر دقت کنید.



گزاره سوم نادرست است، بی‌شمار خط عمود بر d و d' وجود دارد. فقط یک خط، عمود و متقاطع با هر دو خط است.

گروه آموزشی ماز

۲۷- از داخل مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع ۶ و ۸، مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع ۳ و ۴ را خارج کرده‌ایم. اگر این شکل را حول خط d دوران دهیم، حجم شکل حاصل کدام است؟ ($\pi \approx 3$)



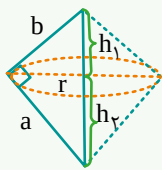
- (۱) $20.8/4$
- (۲) $20.1/6$
- (۳) $19.8/2$
- (۴) $19.0/5$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

دوران بدیم ببینیم چی میشه؟!

اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ای را حول وتر آن دوران دهیم، ۲ مخروط پدید می‌آید با شعاع r و ارتفاع‌های h_1 و h_2 که r همان ارتفاع وارد بر وتر است و h_1 و h_2 نیز طول قطعات جدا شده وتر توسط ارتفاع وارد بر وتر می‌باشند.



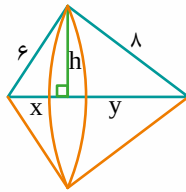
پایخ سبزی

اگر مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۶ و ۸ را حول وتر دوران دهیم، حجم شکل حاصل به صورت زیر خواهد بود.

اولاً: $6 \times 8 = h \times 10 \Rightarrow h = 4.8$

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 x + \frac{1}{3} \pi h^2 y = \frac{1}{3} \pi h^2 (x + y)$$

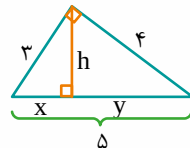
$$V = \frac{1}{3} \pi (4.8)^2 \times 10 = 10 \times (4.8)^2 \quad (1)$$



و اگر مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۳ و ۴ را حول وتر دوران دهیم، حجم شکل حاصل به صورت زیر است:

اولاً: $3 \times 4 = h \times 5 \Rightarrow h = 2.4$

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 \times 5 = \frac{1}{3} \times 3 \times (2.4)^2 \times 5 = 5 \times (2.4)^2 \quad (2)$$

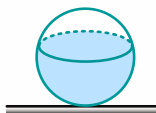


$$(1) - (2): 230.4 - 28.8 = 201.6$$

برای حجم داده شده در سوال کافی است دو عدد را از هم کم کنیم:

گروه آموزشی ماز

۲۸- استخری به شکل کره و به شعاع ۵۰ متر را طوری از آب پر کرده‌ایم که فاصله سطح آب تا پایین‌ترین نقطه کره ۸۰ متر باشد. مساحت سطح آب کدام است؟



- (۱) 900π
- (۲) 1600π
- (۳) 2500π
- (۴) 2000π

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

اگر برش بزنیم، چی شکلی میشه؟!

اگر کره‌ای را توسط صفحه عمودی برش بزنیم، دایره حاصل می‌شود.

صفحه افقی
صفحه عمودی

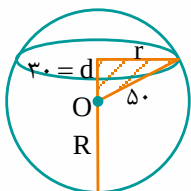
پاسخ تشریحی:

اگر شعاع کره $R = 50$ و $R + d = 80$ باشد، $d = 30$ است، بنابراین:

$$r^2 + d^2 = R^2$$

$$r^2 + 900 = 2500 \Rightarrow r = 40$$

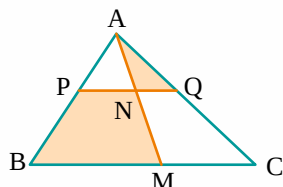
$$S = \pi r^2 = \pi \times 1600 = 1600\pi$$



گروه آموزشی ماز

۲۹- در مثلث $\triangle ABC$ ، PQ را موازی با قاعده به گونه‌ای رسم می‌کنیم که $\frac{AP}{BP} = \frac{2}{5}$ و $\frac{MC}{MB} = \frac{2}{5}$ باشد. نسبت مساحت $\triangle ANQ$ به مساحت چهارضلعی

$PNMB$ کدام است؟



$$\frac{2}{5} \quad (2)$$

$$\frac{4}{21} \quad (4)$$

$$\frac{4}{5} \quad (1)$$

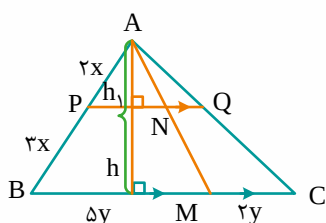
$$\frac{8}{105} \quad (3)$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی:

با توجه به نسبت‌های داده شده خواهیم داشت:



$$PQ \parallel BC \Rightarrow \frac{2x}{5x} = \frac{PN}{5y} = \frac{NQ}{2y} \Rightarrow \begin{cases} PN = 2y \\ NQ = \frac{4}{5}y \end{cases}$$

$$\frac{h_1}{h} = \frac{2}{5} \Rightarrow h = \frac{5h_1}{2}$$

از طرفی، مثلث $\triangle APN$ و $\triangle ABM$ متشابه‌اند:

$$\frac{S_{\triangle ANQ}}{S_{PNMB}} = \frac{\frac{1}{2} \times h_1 \times NQ}{\frac{1}{2} \times (PN + BM) \times (h - h_1)} = \frac{h_1 \times \frac{4}{5}y}{(2y + 5y) \times \frac{3h_1}{2}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{7}{2}} = \frac{8}{105}$$

گروه آموزشی ماز

۳۰- از نقطه‌ای دلخواه داخل مثلث متساوی‌الاضلاع $\triangle ABC$ به سه ضلع عمودهایی رسم کرده‌ایم. مجموع این فواصل $2\sqrt{3}$ است. اگر M_1 ، M_2 و M_3 پای

سه میانه مثلث باشد، مساحت مثلث $M_1M_2M_3$ کدام است؟

$$4\sqrt{3} \quad (4)$$

$$3\sqrt{3} \quad (3)$$

$$2\sqrt{3} \quad (2)$$

$$\sqrt{3} \quad (1)$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ تشریحی:

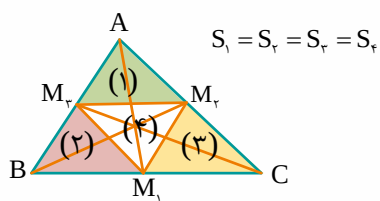
می‌دانیم اگر از هر نقطه دلخواه داخل مثلث متساوی‌الاضلاع به سه ضلع آن عمود کنیم، مجموع سه فاصله برابر است با ارتفاع مثلث که از رابطه $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ به دست

می‌آید:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

دقت شود که میانه‌های رسم شده در مثلث $\triangle ABC$ ، آن را به ۴ مثلث هم‌نهشت و هم‌مساحت تقسیم می‌کند، بنابراین:



$$S_{\triangle M_1 M_2 M_3} = \frac{1}{4} (4\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

● ————— ●

گروه آموزشی ماز

و در آخر آمار و احتمال رو داریم!!!

آمار و احتمال دو مبحثی هستند که در اینجا روشون بحث می‌کنیم. فصل دوم، احتمال و فصل سوم و چهارم، آمار رو پوشش می‌دن. فصل ۷ دهم هم که هر دو رو با هم داره.

ابتدا فصل دوم رو توضیح بدم: این جوری بهت بگم که هر کاری برای زدن تست احتمال تو کنکور لازمه، باید تو این فصل انجام بدی. این فصل کل امتحان کنکور (در زمینه احتمال) رو در برمی‌گیره. مباحثی از قبیل تعداد اعضای فضای نمونه‌ای، پیشامدها، احتمال شرطی، احتمال کل و قانون بیز. سوالات خفن این بحث معمولاً از احتمال شرطی به بعد هستش. سخت‌ترین سوالات و به قولی گول مرحله آخر هم بدون شک سوالات قانون بیز هست. پس سعی کنی روی این مباحث به خوبی مسلط بشی.

اما فصل سوم و چهارم کتاب آمار و احتمال و بحث شیرین و دانشگاهی آمار تقریباً با فهم مطالب همه کنار می‌آیند. پس طراح دست روی نقطه ضعف ما می‌ذاره. یعنی «محاسبات» و محاسبه واریانس، انحراف معیار، CV و ... علاوه بر این‌ها، سوالات این قسمت ممکنه از مباحث نمودار جعبه‌ای، برآورد و نیز مطرح بشن. در مورد ۳ فصل مطرح شده تو آزمون، این طور بهت بگم که کتاب آمار و احتمال، یک کتاب برای امتیاز آوردن تو کنکوره! و در نهایت فصل ۷ ریاضی دهم: این فصل هم بخش احتمال داره و هم بخش آمار که دسته‌گرفته به برخی مباحث پرداخته، البته توی بحث آمار یه سری مباحثی داره که در کتاب آمار و احتمال در موردشون بحث نشده، مثل متغیر و انواع آن که خب البته شانس خیلی کمی برای طرح سوال ازشون وجود داره!

پیش‌نیازهای مطالعه این بخش چه مباحثی است؟

برای بخش احتمال، باید تسلط خوبی روی بحث مجموعه‌ها، همچنین شمارش داشته باشید. پس باید روی فصل‌های ۱ و ۶ ریاضی دهم و همچنین فصل ۱ کتاب آمار و احتمال یازدهم تسلط پیدا کنی.

بخش آمار هم پیش‌نیاز خاصی نداره و به راحتی می‌شه اون‌ها رو با مباحث ریاضی پایه‌ای که هر دانش‌آموز باید بلد باشه جمع کرد.

مباحث این بخش در کدام قسمت‌ها کاربرد داره؟

از این بخش‌ها معمولاً به صورت ایزوله سوال میاد، یعنی خودشون مورد سوال واقع می‌شن و با بخش‌های دیگه، کمتر ترکیب می‌شن. البته باز هم نباید از سوالات ترکیبی غافل شد.

از این بخش در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از چه موضوعاتی بوده؟

۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۱ (دی)	۱۴۰۲
۴	۵	۵	۴	۴	۳
احتمال کل (نمودار درختی) پیشامد - اعمال جبری روی پیشامدها میانگین وزنی نمودار جعبه‌ای	احتمال احتمال شرطی احتمال کل احتمال شرطی نمودار میله‌ای میانگین	احتمال شرطی (ترکیب با فصل ۱ آمار و احتمال) نمودار جعبه‌ای - واریانس احتمال احتمال (ترکیب با فصل ۱ گسسته) احتمال کل	احتمال غیر هم‌شانس (ترکیب با دنباله هندسی) احتمال شرطی برآورد واریانس - انحراف از میانگین	احتمال (ترکیب با معادله درجه دوم) احتمال شرطی - پیشامد سازگار ضریب تغییرات قانون بیز	احتمال انحراف معیار قانون بیز

پیش‌بینی شما برای کنکور سال آینده چیه؟

با توجه به کاهش تعداد سوالات در کنکور و روند مشاهده شده در بالا، پیش‌بینی می‌شود تعداد ۲ - ۳ سوال از احتمال و یک سوال از آمار مطرح شود.

۳۱- عددی سه رقمی و بخش پذیر بر ۴ انتخاب کرده ایم. با کدام احتمال بر ۵ بخش پذیر است ولی بر ۳ بخش پذیر نیست؟

$$\frac{4}{25} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{5} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{15} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{5} \quad (۱)$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

می‌فهمیم تو این نکته در مورد تعداد اعداد بخش پذیر بر a صحبت کنیم!

تعداد اعداد بخش پذیر بر a در بازه $[A, B]$ برابر است با:

$$\text{تعداد} = \left\lfloor \frac{B}{a} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{A-1}{a} \right\rfloor$$

پاسخ سریعی:

اگر فضای نمونه‌ای S را اعداد سه رقمی بخش پذیر بر ۴ در نظر بگیریم:

$$n(S) = \left\lfloor \frac{999}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{4} \right\rfloor = 249 - 24 = 225$$

آن‌گاه پیشامد مطلوب سوال برابر است با:

B بخش پذیر بر ۳ C بخش پذیر بر ۵

$$n(C - B) = n(C) - n(C \cap B)$$

که البته چون فضای نمونه‌ای سه رقمی‌های بخش پذیر بر ۴ است، خواهیم داشت:

$n(A) = n(\text{بخش پذیر بر } ۲۰) - n(\text{بخش پذیر بر } ۶۰)$ پیشامد A

$$= \left(\left\lfloor \frac{999}{20} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{20} \right\rfloor \right) - \left(\left\lfloor \frac{999}{60} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{99}{60} \right\rfloor \right) = (49 - 4) - (16 - 1) = 45 - 15 = 30$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{225} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

گروه آموزشی ماز

۳۲- تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد متناسب با تعداد مقسوم‌علیه‌های آن است. اگر تاس را پرتاب کنیم، با کدام احتمال عدد رو شده نسبت به ۶ اول است؟

$$\frac{2}{7} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{14} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{7} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{14} \quad (۱)$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

خب رسیدیم به احتمال غیر هم‌شانس!

هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس می‌گوییم. مثل همین سوال!

پاسخ سریعی:

می‌دانیم اگر $p(1)$ احتمال وقوع عدد ۱، $p(2)$ احتمال وقوع عدد ۲ و ... $p(6)$ احتمال وقوع عدد ۶ باشد:

$$p(1) + p(2) + \dots + p(6) = 1$$

$$1t + 2t + 3t + 4t + 5t + 6t = 1 \Rightarrow 21t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{21}$$

$$\Rightarrow p(1) = \frac{1}{21} \quad p(2) = \frac{2}{21} \quad p(3) = \frac{3}{21} \quad p(4) = \frac{4}{21} \quad p(5) = \frac{5}{21} \quad p(6) = \frac{6}{21}$$

پیشامد مطلوب $= \{1, 5\}$

$$p(1) + p(5) = t + 5t = 6t = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

گروه آموزشی ماز

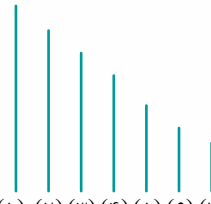
۳۳- یک تیم والیبال، ۷ والیبالیست دارد که قد هیچ دو نفری از آن‌ها برابر نیست. یک والیبالیست انتخاب می‌کنیم. اگر دو نفر دیگر انتخاب کنیم و هر دو از والیبالیست اول کوتاهتر باشند، با چه احتمالی والیبالیست اول بلندقدترین است؟

$$\frac{4}{7} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{7} \quad (۳)$$

$$\frac{2}{7} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{7} \quad (۱)$$



اگر جایگاه‌های قد ۷ نفر را به صورت (۱) (۲) (۳) (۴) (۵) (۶) (۷) در نظر بگیریم، فضای نمونه‌ای به صورت $7! \times 2! \times 4!$ خواهد بود. به عبارتی، ۳ جایگاه را انتخاب می‌کنیم و چون می‌دانیم ۲ نفر از نفر اولی کوتاه‌ترند، جایگاه بلندترین را به نفر اول می‌دهیم و ۲ نفر دیگر ۲! جابه‌جایی در جایگاه‌های دیگر دارند و ۴ نفر دیگر نیز در ۴ جایگاه مانده، ۴! جابه‌جایی دارند. در نتیجه احتمال اینکه نفر اول بلندقدترین باشد، برابر است با:

$$P(\text{شرطی}) = \frac{1 \times 6!}{\binom{7}{3} \times 2 \times 4!} = \frac{3}{7}$$

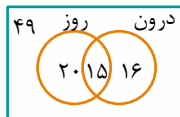
گروه آموزشی ماز

۳۴- آمار نشان می‌دهد که در شهر تهران ۰/۳۵ جرائم در طول روز و ۰/۳۱ جرائم در درون شهر صورت می‌گیرد. اگر ۰/۲ جرائم در حومه شهر و طول روز اتفاق بیفتد، در این صورت، اگر جرمی اتفاق افتاده باشد، با چه احتمالی در حومه شهر و در طول شب بوده است؟

۰/۱۶ (۱)
۰/۴۹ (۲)
۰/۶۵ (۳)
۰/۶۶ (۴)

بهترین راه حل این سوال، استفاده از نمودار به صورت زیر است:

$$\text{مطلوب سوال} = \frac{49}{100}$$



گروه آموزشی ماز

۳۵- دو کیسه داریم، در کیسه A، ۵ مهره قرمز و ۳ مهره آبی و در کیسه B، ۴ مهره قرمز و ۴ مهره آبی وجود دارد. ۶ مهره به تصادف از کیسه B برداشته و به کیسه A اضافه می‌کنیم و سپس از کیسه A مهره‌ای برمی‌داریم. با کدام احتمال این مهره قرمز است؟

$$\frac{2}{3} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (۳)}$$

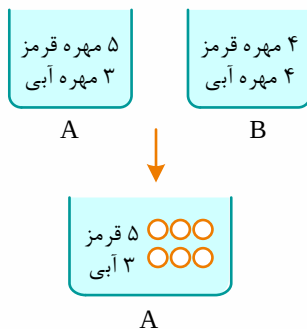
$$\frac{4}{7} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۱)}$$

قانون احتمال کل چی میگه؟!

فرض کنید $B_1, B_2, \dots, B_n$ پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A، داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n) = \sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)$$



اگر دو ظرف را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

مهره‌ای که از کیسه A انتخاب می‌کنیم یا از مهره‌های قدیمی ظرف است که احتمال آن $\frac{4}{14}$ است و یا از مهره‌هایی است که از ظرف B به ظرف A منتقل شده است که احتمال آن $\frac{6}{14}$ است. در نتیجه:

$$P = \frac{8}{14} \times \frac{5}{8} + \frac{6}{14} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{14} + \frac{3}{14} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

گروه آموزشی ماز

۳۶- خانواده‌ای ۴ فرزند دارد. فرزندی را به تصادف انتخاب می‌کنیم و می‌بینیم خواهر بزرگ‌تر از خود دارد. با کدام احتمال او کوچک‌ترین فرزند خانواده است؟

$$\frac{3}{4} \text{ (۴)}$$

$$\frac{7}{8} \text{ (۳)}$$

$$\frac{15}{16} \text{ (۲)}$$

$$\frac{7}{17} \text{ (۱)}$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

یه سر هم به قانون بیز بنیم!

قانون بیز: فرض کنید $B_1, B_2, \dots, B_n$ پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A و هر $i \leq n$ داریم:

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

همچنین $P(A)$ را می‌توان به صورت $\sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)$ نوشت.

پاسخ تشریحی:

احتمال اینکه خواهر بزرگ‌تر داشته باشد $P(A)$

احتمال اینکه کوچک‌ترین فرزند خانواده باشد $P(B_4)$

سوال از ما $P(B_4 | A)$ را خواسته است. با استفاده از قانون بیز داریم:

$$P(B_4 | A) = \frac{P(A | B_4)P(B_4)}{P(A | B_1)P(B_1) + P(A | B_2)P(B_2) + P(A | B_3)P(B_3) + P(A | B_4)P(B_4)}$$

$P(B_1)$: احتمال اینکه اولین فرزند خانواده باشد.

$P(B_2)$: احتمال اینکه دومین فرزند خانواده باشد.

$P(B_3)$: احتمال اینکه سومین فرزند خانواده باشد.

اکنون داریم:

$$P = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{7}{8}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{7}{8}}$$

احتمال اینکه خواهر بزرگ‌تر داشته باشد
فرزند اول

$$P = \frac{\frac{7}{32}}{\frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{7}{32}} = \frac{\frac{7}{32}}{\frac{17}{32}} = \frac{7}{17}$$

گروه آموزشی ماز

۳۷- اگر میانگین داده‌های $\log 2, \log \frac{3}{4}, \log \frac{4}{3}, \log \frac{5}{4}$ را m و انحراف معیار داده‌های $2, 5, 8, 11, 14$ را n بنامیم، آن‌گاه mn کدام است؟ $(\log 5 \approx \frac{\sqrt{2}}{2})$

$$1/25 \text{ (۴)}$$

$$1/5 \text{ (۳)}$$

$$0/75 \text{ (۲)}$$

$$0/5 \text{ (۱)}$$

(متوسط - ترکیبی / محاسباتی - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

۳ تا فرمول فقط می‌خواهیم بگیریم، همین!

اگر داده‌های $X_1, X_2, \dots, X_n$ باشند، آن‌گاه میانگین و واریانس و انحراف معیار برابر هستند با:

$$\bar{x} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \text{ میانگین}$$

$$\sigma^2 = \frac{(X_1 - \bar{x})^2 + (X_2 - \bar{x})^2 + \dots + (X_n - \bar{x})^2}{n} \text{ واریانس}$$

$$\sqrt{\sigma^2} = \sigma \text{ انحراف معیار}$$

$$m = \bar{x} = \frac{\log 2 + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \log \frac{5}{4}}{4} = \frac{\log(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4})}{4} = \frac{\log 5}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

می‌دانیم اگر n داده تشکیل دنباله حسابی با قدرنسبت d دهند، واریانس آن‌ها برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{k^2 - 1}{12} \cdot d^2 \Rightarrow n^2 = \sigma^2 = \frac{5^2 - 1}{12} \times 9 = 18 \xrightarrow{\text{انحراف معیار}} \sigma = n = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow mn = \frac{\sqrt{2}}{8} \times 3\sqrt{2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0.75$$

گروه آموزشی ماز

۳۸- ضریب تغییرات داده‌های ۳۲۰، ۳۲۲، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۳۰ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{13}}{321} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{12/8}}{321} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{13}}{323} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{12/8}}{323} \quad (1)$$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۱

فرمول ضریب تغییرات چی بود بچه‌ها؟!

اگر میانگین تعدادی داده، $\bar{x}$ و انحراف معیار آن‌ها σ باشد، آن‌گاه ضریب تغییرات داده‌ها (CV) برابر است با: $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

می‌دانیم اگر از داده‌ها عددی کم شود، انحراف معیار و واریانس تغییری نمی‌کنند، بنابراین برای راحتی کار از همه داده‌ها ۳۲۰ را کم می‌کنیم.
۰، ۲، ۱، ۲، ۱۰

$$\bar{x} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\sigma^2 = \frac{9 + 1 + 4 + 1 + 49}{5} = \frac{64}{5} = 12.8$$

$$\bar{x} = 3 + 320 = 323$$

میانگین داده‌ها:

$$CV = \frac{\sqrt{12.8}}{323} \quad CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \text{ به دست می‌آید:}$$

گروه آموزشی ماز

۳۹- اگر اعداد طبیعی تک رقمی کوچک‌تر از ۹ را به عنوان جامعه آماری در نظر بگیریم. با کدام احتمال، یک نمونه ۶ عضوی، میانگین را دقیق برآورد می‌کند؟

$$\frac{1}{5} \quad (4)$$

$$\frac{1}{7} \quad (3)$$

$$\frac{1}{9} \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} \quad (1)$$

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} \bar{x} = \frac{1+8}{2} = 4.5$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_6}{6} = 4.5 \Rightarrow \sum_{i=1}^6 a_i = 27$$

می‌دانیم که $\sum_{i=1}^8 a_i = 36$ است. پس بهتر است حالت‌هایی که جمع دو عدد $9 = 36 - 27$ است، را در نظر بگیریم:

$$\{1, 8\} \quad \{2, 7\} \quad \{3, 6\} \quad \{4, 5\}$$

$$P = \frac{4}{\binom{8}{2}} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$$

گروه آموزشی ماز

۴۰- حد بالا و پایین فاصله ۹۵ درصدی برای یک جامعه که با استفاده از نمونه ۱۶۰۰ تایی برآورد شده است برابر ۵۷/۵ و ۵۲/۵ می باشد. اختلاف میانگین نمونه و انحراف معیار جامعه کدام است؟

۱۱ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۳ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

بزن بریم سمت برآورد:

برآورد بازه‌ای برای میانگین جامعه: اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازه n در اختیار داشته باشیم، با اطمینان بیش از ۹۵٪ می‌توانیم بگوییم:

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

که μ میانگین جامعه و σ انحراف معیار جامعه است.

پاسخ تشریحی:

$$\begin{cases} \bar{x} + \frac{2\sigma}{40} = 57/5 \\ \bar{x} - \frac{2\sigma}{40} = 52/5 \end{cases} \Rightarrow 2\bar{x} = 110 \Rightarrow \bar{x} = 55$$

$$\Rightarrow 55 + \frac{\sigma}{20} = 57/5 \Rightarrow \sigma = 50$$

سوال: $\bar{x} - \sigma = 5$

گروه آموزشی ماز

جمع بندی سریع

فب فسته نباشیدا هلا بریم کل مباحث این آزمون رو به شکل نمودار درختی مرور کنیم تا به نقشه ذهنی خوب از این مباحث توی ذهنتون شکل بگیره!

نمایش زوج مرتبی: هیچ دو زوج مرتبی مولفه اول برابر نداشته باشند مگر اینکه مولفه دوم دو زوج مرتب نیز با هم برابر باشند.

نمایش نموداری: هر خط موازی محور y ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

نمایش پیکانی: از هر عضو مجموعه اول دقیقاً یک پیکان خارج شود.

تابع

تابع ثابت: $f(x) = C, C \in \mathbb{R}$

تابع همانی: $f(x) = x$

تابع خطی: $f(x) = ax + b$

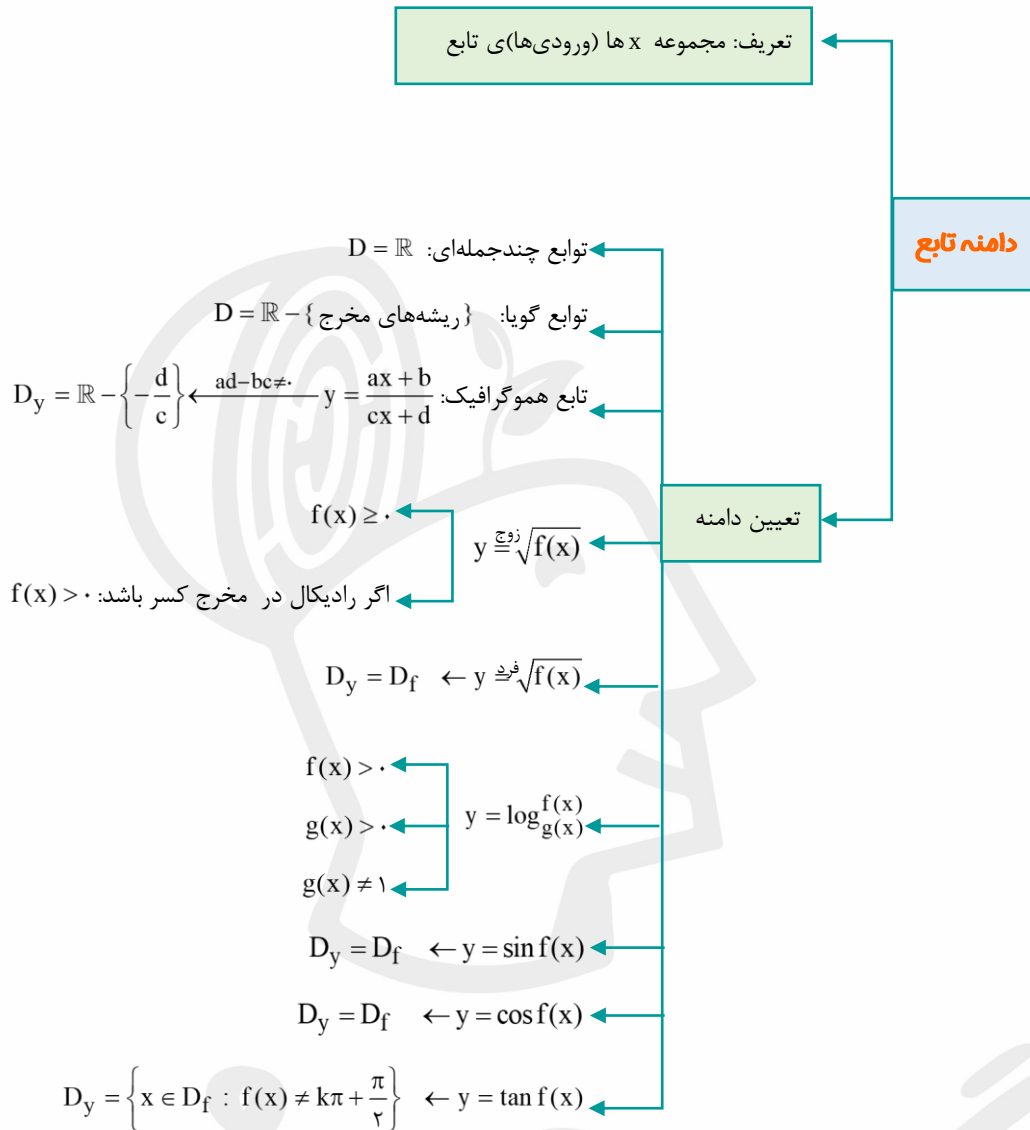
تابع جزء صحیح: $f(x) = [g(x)]$

تابع قدر مطلق: $f(x) = |g(x)|$

توابع مثلثاتی

توابع نمایی و لگاریتمی

انواع



تعریف: مجموعه y ها به ازای x های تابع

برد تابع

$$R = \mathbb{R} \leftarrow y = \log_a^x$$

$$R = (0, +\infty) \leftarrow y = a^x$$

$$R = [0, +\infty) \leftarrow y = \sqrt{x}$$

$$R = \mathbb{R} - \left\{ \frac{a}{c} \right\} \leftarrow \frac{ad-bc \neq 0}{y = \frac{ax+b}{cx+d}}$$

$$R = [-1, 1] \leftarrow y = \sin x$$

$$R = [-1, 1] \leftarrow y = \cos x$$

$$R = \mathbb{R} \leftarrow y = \tan x$$

$$R = \left[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty \right) \leftarrow \begin{matrix} a > 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{matrix}$$

$$R = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a} \right] \leftarrow \begin{matrix} a < 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{matrix}$$

برد توابع معروف

نمایش زوج مرتبی: مولفه اول و دوم تکراری نباشند و اگر مولفه دوم دو زوج مرتب با هم برابر باشند باید مولفه اول آن‌ها نیز با هم برابر باشند.

هر خط موازی محور y ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

هر خط موازی محور x ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

نمایش نموداری

تابع یک به یک

یک به یک های معروف

$$y = \log_a^x$$

$$y = a^x$$

$$y = \sqrt{ax + b}$$

$$(ad - bc \neq 0) \quad y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

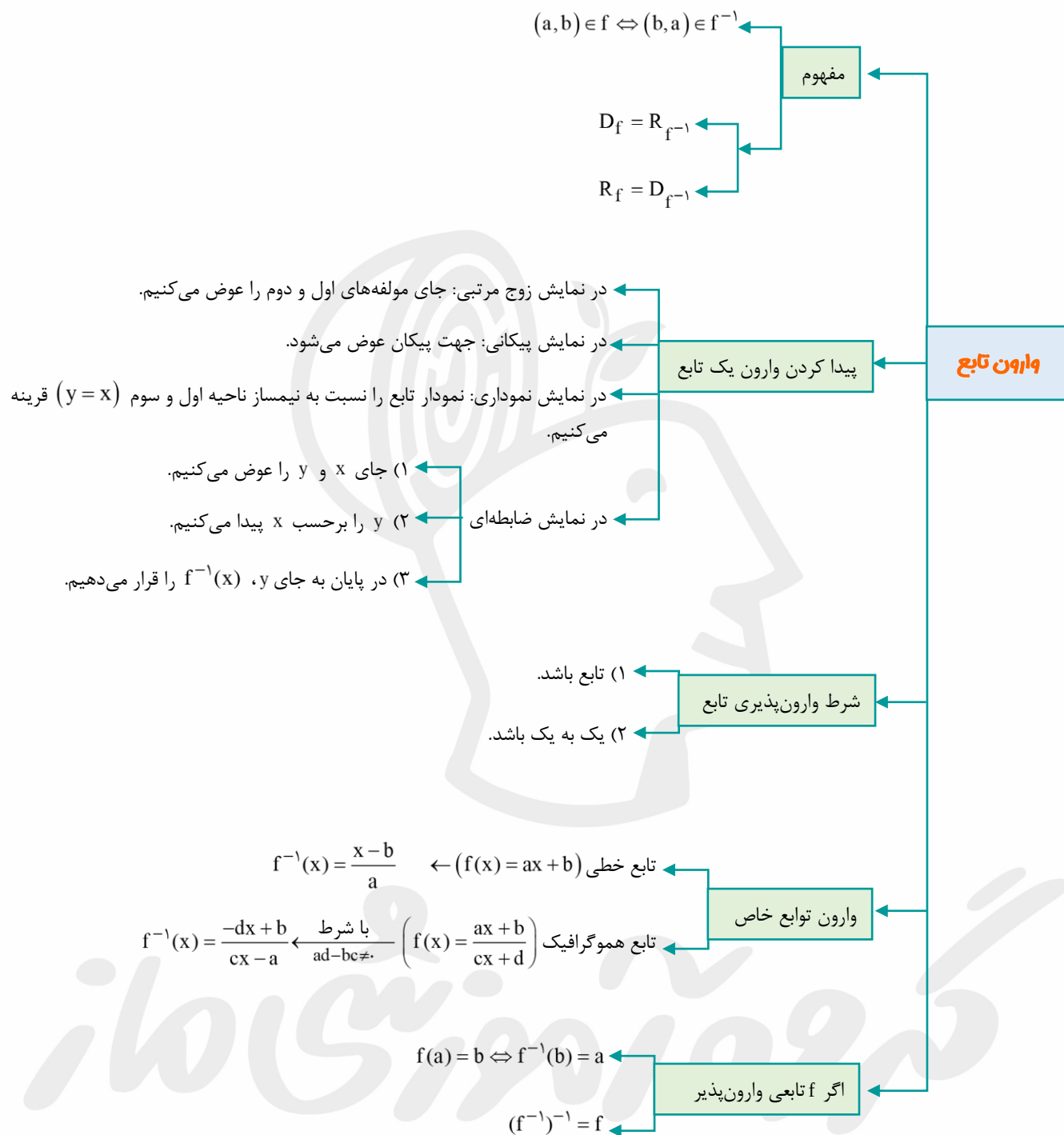
توابع مثلثاتی

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{تابع درجه دوم}$$

$$y = |ax + b|$$

$$y = [ax + b]$$

غیر یک به یک های معروف



$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$(f.g)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$$

ضابطه‌ها

$$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{f.g} = D_f \cap D_g$$

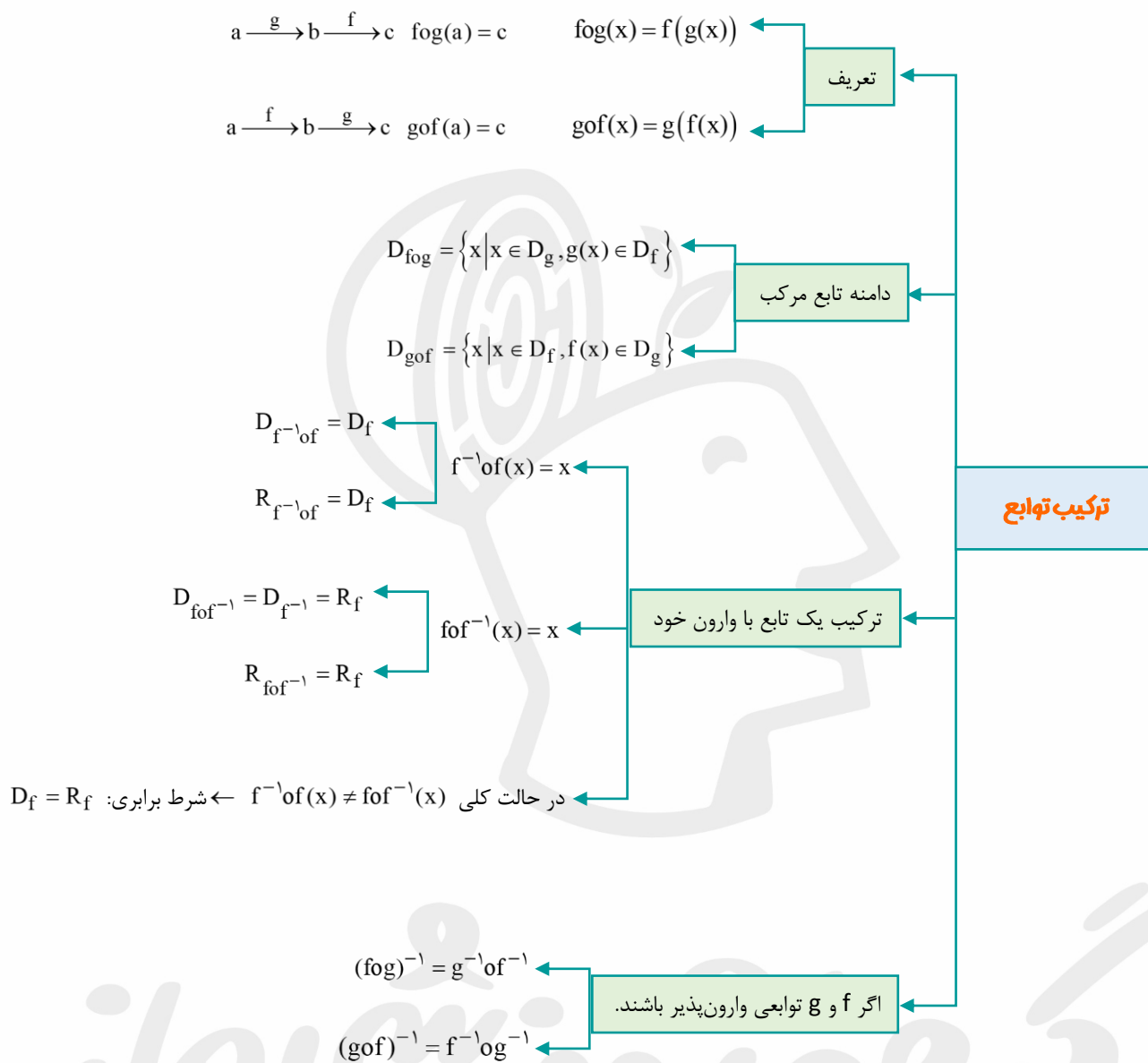
$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$$

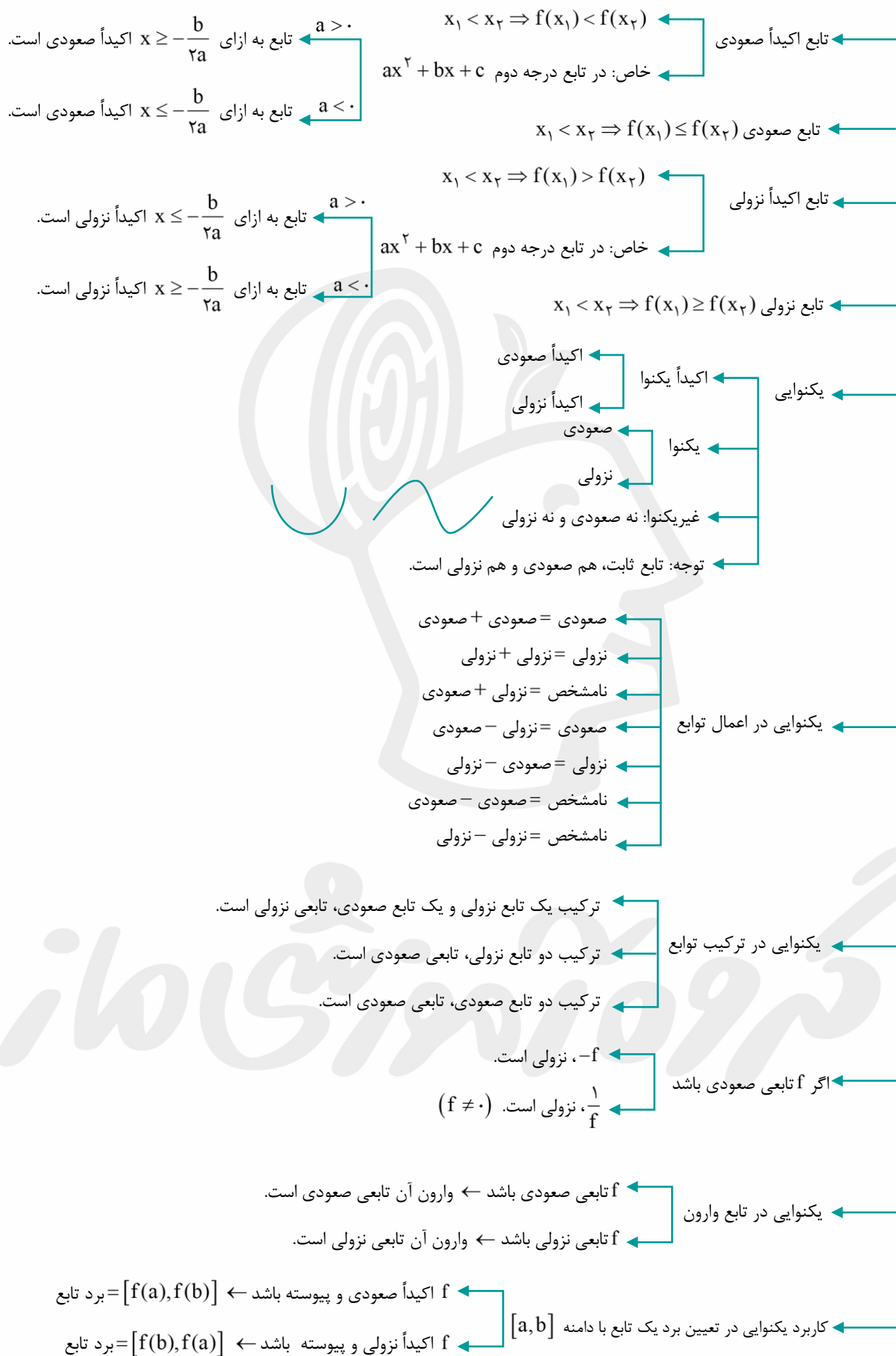
دامنه

اعمال جبری روی توابع

توجه: اعمال روی توابع، فقط به ازای دامنه مشترک (مولفه اول مشترک در نمایش زوج مرتبی) صورت می‌گیرد.

نمودار جدید ($a, k > 0$)	توضیحات و نحوه رسم
$f(x + a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت چپ منتقل می کنیم.
$f(x - a)$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می کنیم.
$f(x) + a$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت بالا منتقل می کنیم.
$f(x) - a$	نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت پایین منتقل می کنیم.
$f(-x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه می کنیم.
$-f(x)$	نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم.
$-f(-x)$	نمودار تابع f را ابتدا نسبت به محور x ها و سپس نسبت به محور y ها قرینه می کنیم (قرینه نسبت به مبدأ مختصات)
$f(kx)$	$k > 1$ نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض (فشرد) می کنیم.
	$0 < k < 1$ نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط (کشید) می کنیم.
$kf(x)$	$k > 1$ نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منبسط (کشید) می کنیم.
	$0 < k < 1$ نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منقبض (فشرد) می کنیم.
$ f(x) $	ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آنچه زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم.
$f(x)$	ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آنچه در سمت راست محور y ها قرار دارد را در سمت چپ کپی می کنیم.





تابع لگاریتمی $y = \log_a^x$

وضعیت	$a > 1$	$0 < a < 1$
نمودار		
دامنه	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$
برد	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
وضعیت یکنوایی	اکیداً صعودی و یکنوا $x_2 > x_1 \leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$	اکیداً نزولی و یکنوا $x_2 > x_1 \leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$
وضعیت یک به یک بودن	یک به یک و وارون پذیر	یک به یک و وارون پذیر
وضعیت نسبت به محور x ها	در نقطه $(1, 0)$ محور x ها را قطع می کند.	در نقطه $(1, 0)$ محور x ها را قطع می کند.
وضعیت نسبت به محور y ها	برخورد ندارد	برخورد ندارد
وضعیت حدی	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$



ویژگی‌های لگاریتم

ویژگی	مثال
$\log_a 1 = 0$	$\log_3 1 = 0$
$\log_a a = 1$	$\log_3 3 = 1$
$\log_a b^n = n \log_a b$	$\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3 \log_5 5$
$\log_a b^m = \frac{m}{n} \log_a b$	$\log_{\sqrt{10}} (10) = \log_{10^{\frac{1}{2}}} 10 = \log_{10} 10 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = -2 \log_{10} 10 = -2$
$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$	$\log_{\sqrt{2}} 4 + \log_{\sqrt{2}} 16 = \log_{\sqrt{2}} 64 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^6 = 12$
$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$	$\log_3 81 - \log_3 9 = \log_3 \frac{81}{9} = \log_3 9 = 2$
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (تغییر مبنا)	$\log_3 9 = \frac{\log_4 9}{\log_4 3}$ (تغییر مبنا به ۴)
$c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$	$(81)^{\log_3 \sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\log_3 81} = (\sqrt{2})^4 = 4$
$\log_a b \times \log_b c \times \dots \times \log_n m = \log_a m$	$\log_3 9 \times \log_9 \sqrt{3} \times \log_{\sqrt{3}} 4 = \log_3 9 \times 2 \log_3 \sqrt{3} \times (-\log_3 \sqrt{3}) = -2$
$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$	$\log_3 9 = \frac{1}{\log_9 3}$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$$\text{روش تغییر متغیر } (t = a^x)$$

روش رسم هندسی

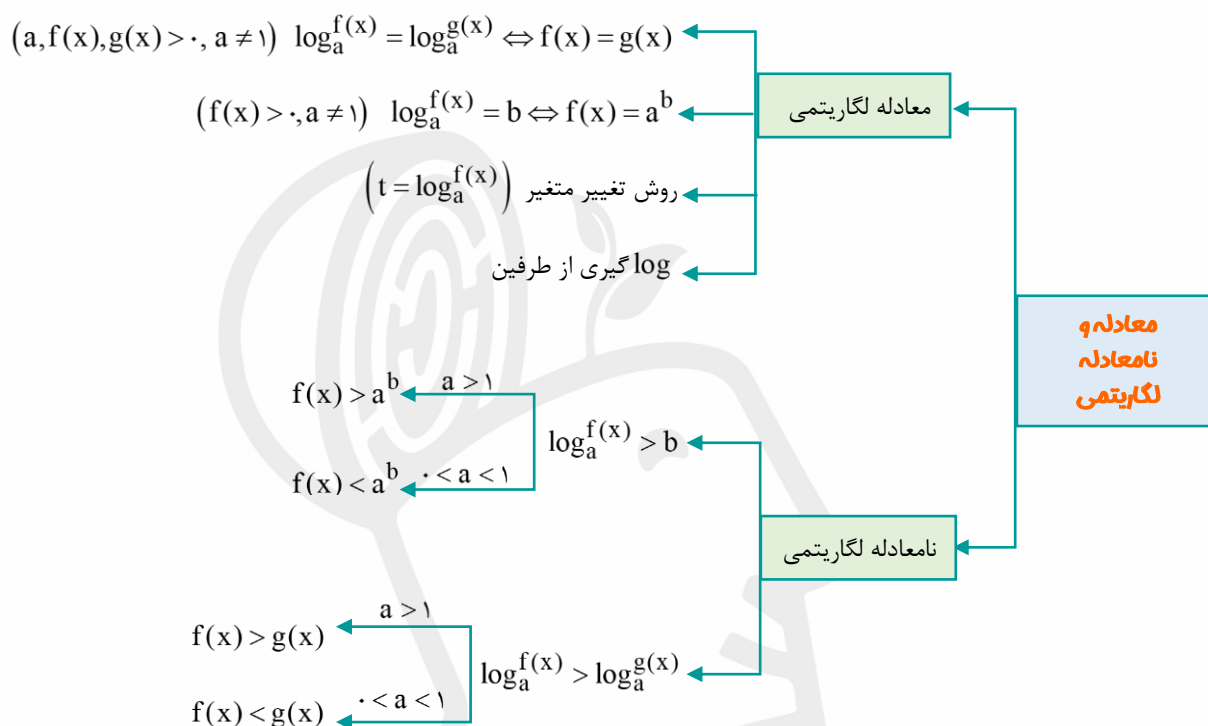
معادله نمایی

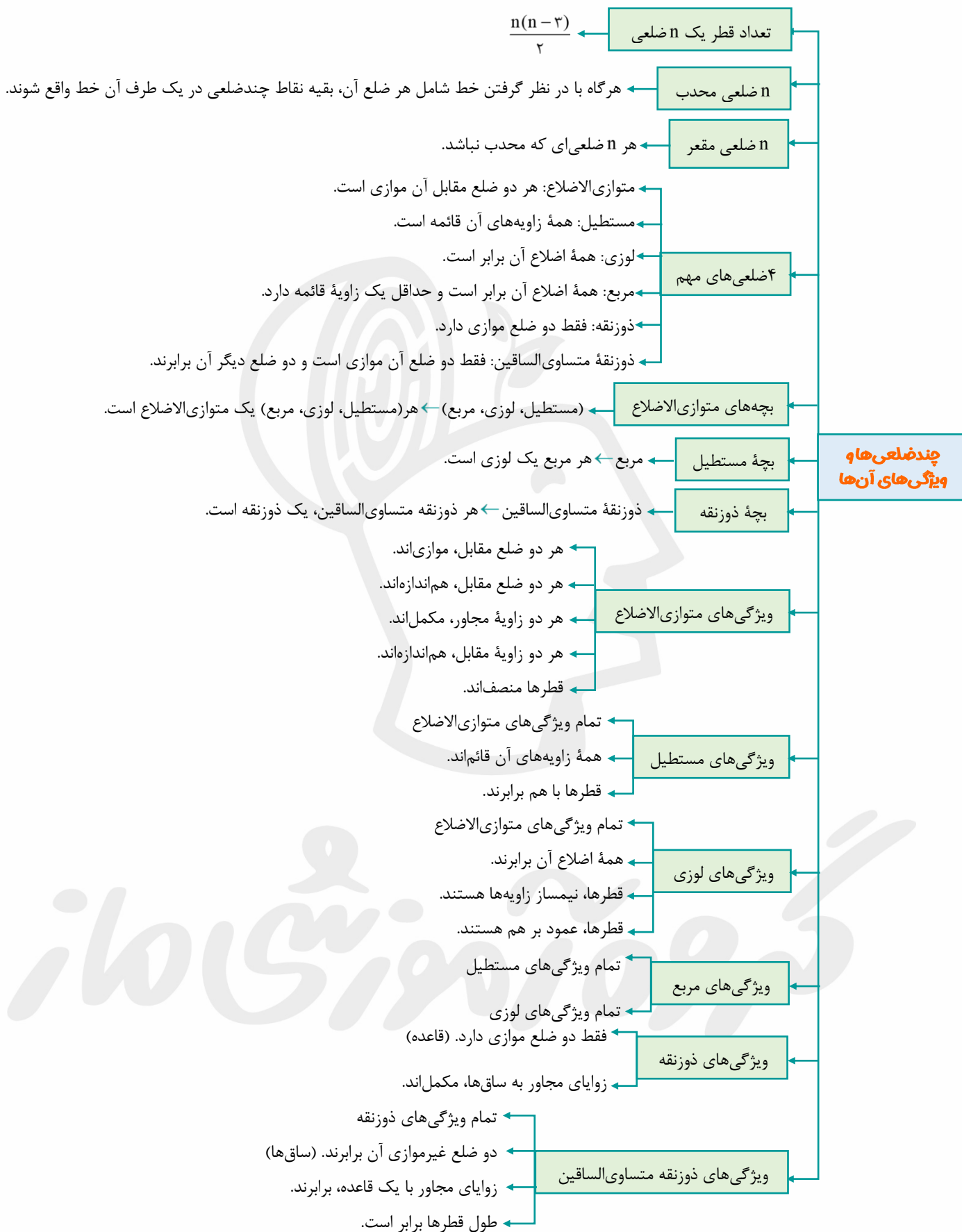
معادله و نامعادله نمایی

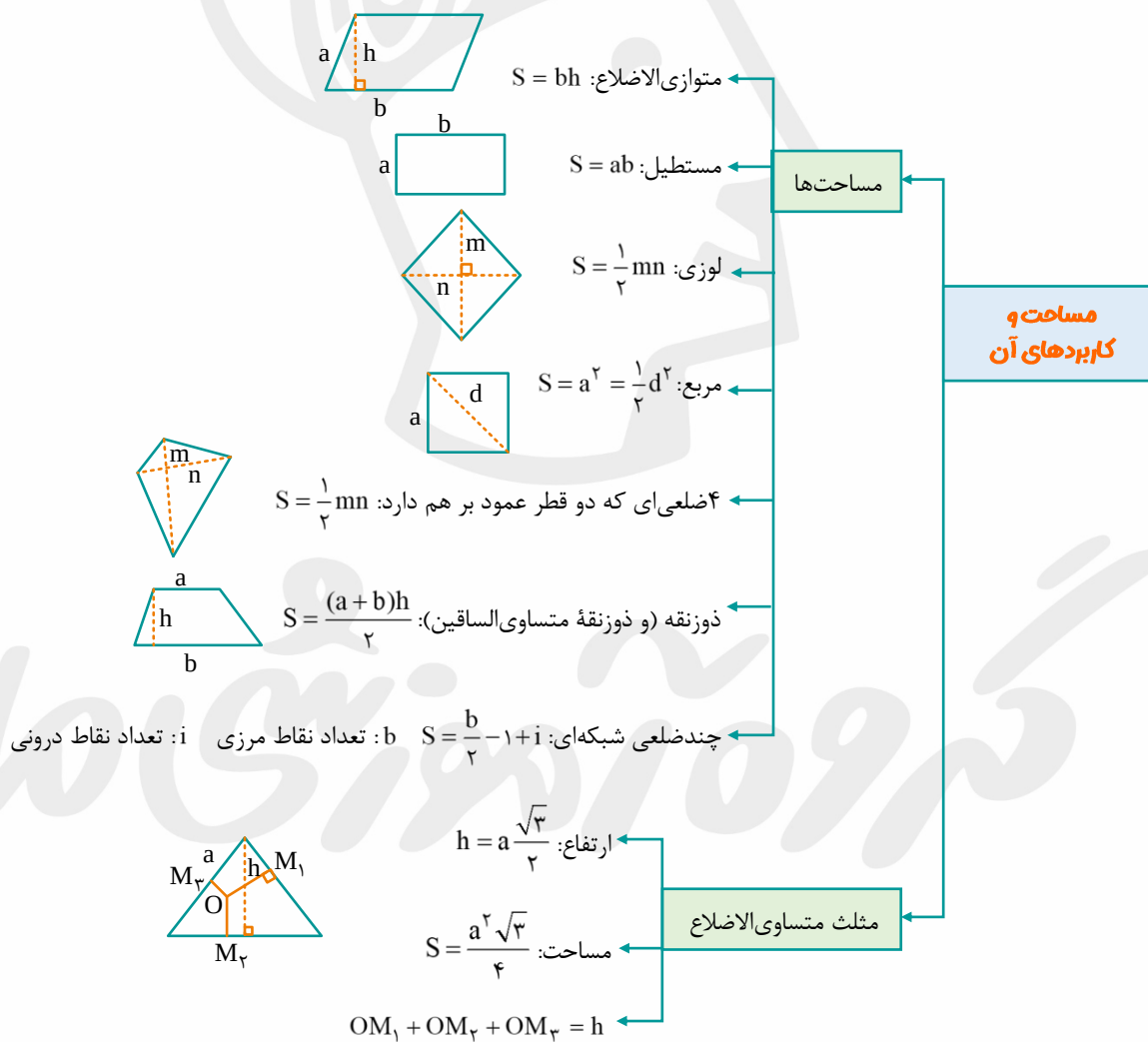
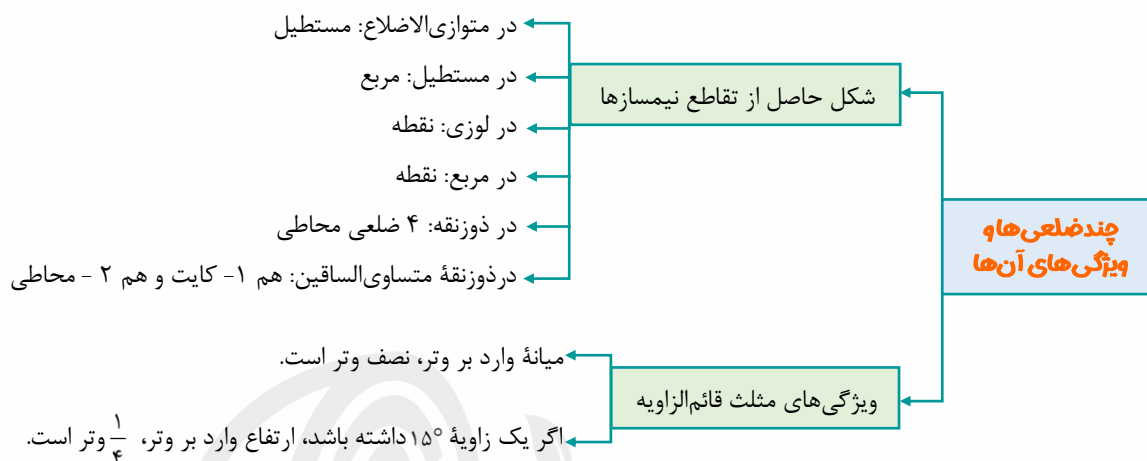
$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) : a > 1$$

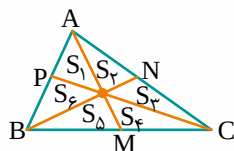
نامعادله نمایی

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) : 0 < a < 1$$









$$AG = 2GM \quad AM = 3GM$$

نسبت ایجاد شده (۱ به ۲):

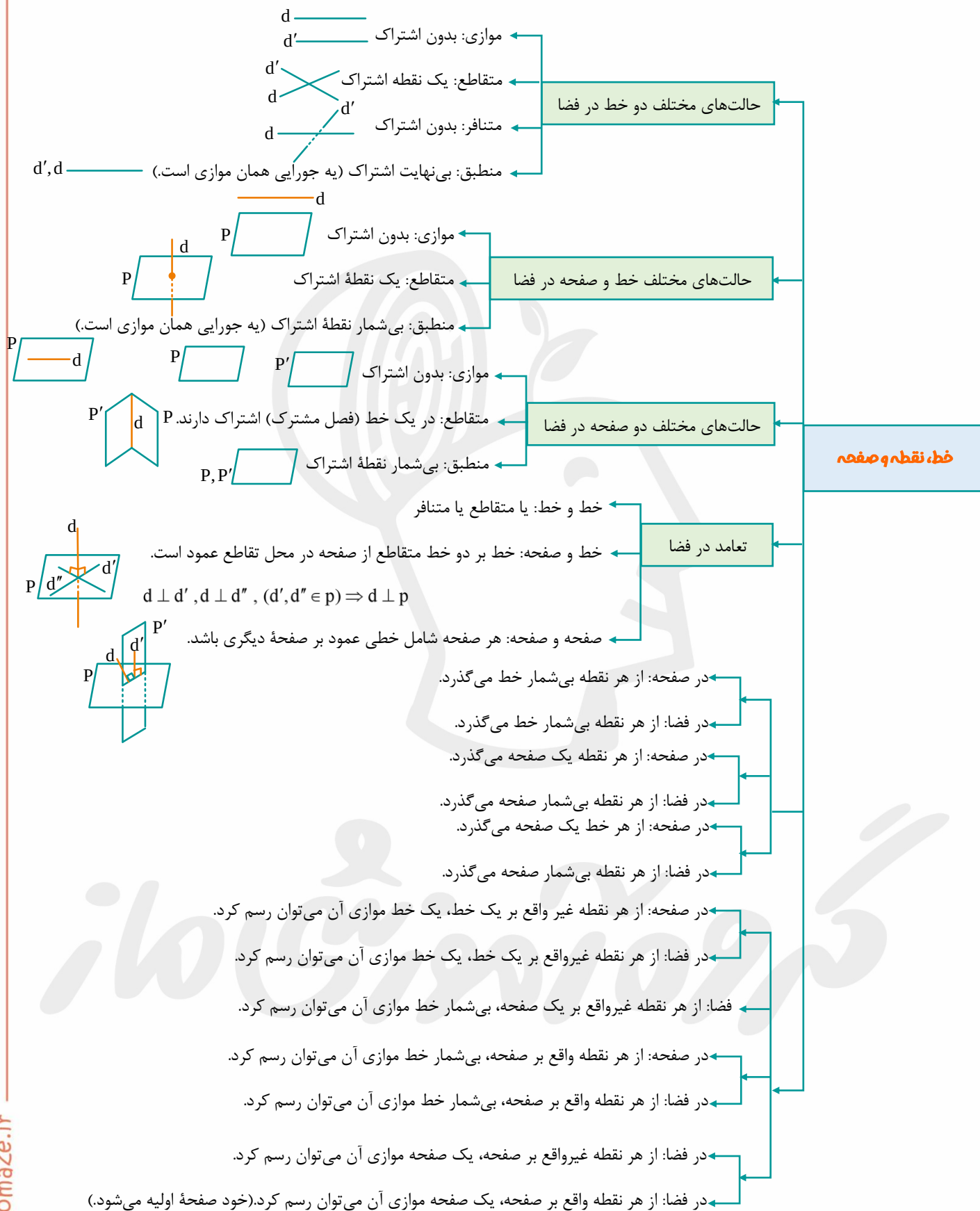
۳ میانه مثلث، آن را به ۶ مثلث هم مساحت تقسیم می کنند:

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$$

اوساط مثلث، آن را به ۴ مثلث هم منهدشت و هم مساحت تقسیم می کنند.

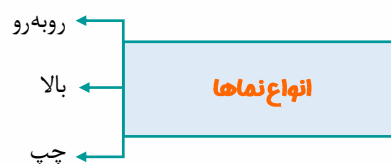
۳ میانه هم رس اند.

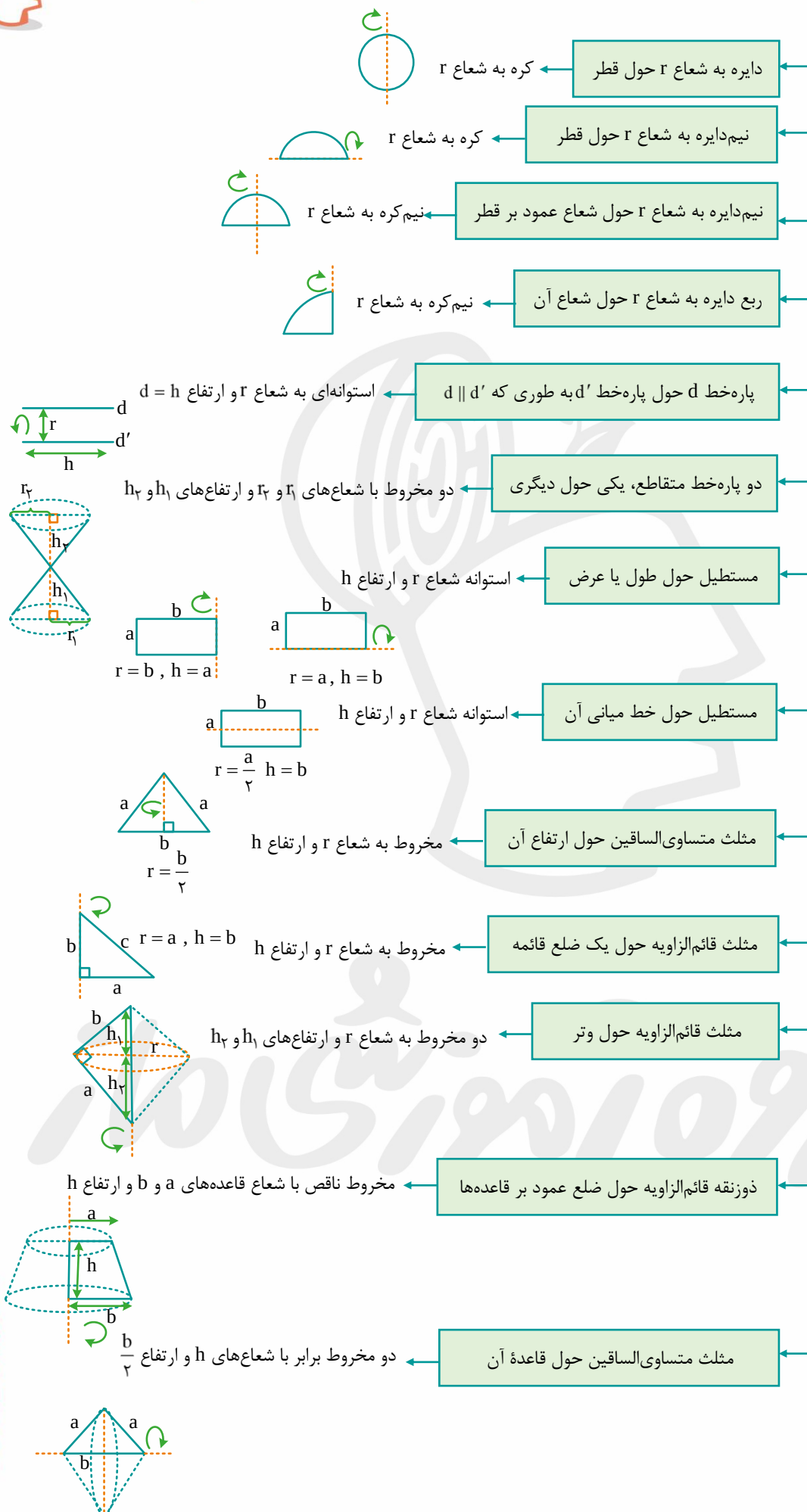
میانه و ویژگی های آن

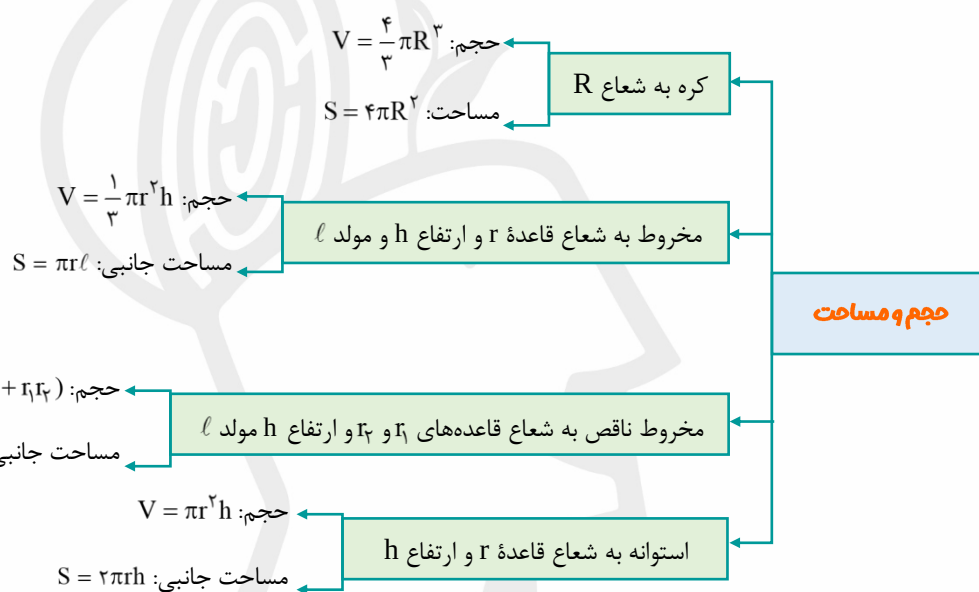












احتمال

تعاریف

فضای نمونه‌ای: مجموعه شامل همه حالت‌های ممکن
پیشامد: هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای
پیشامد ساده: هر زیرمجموعه تک عضوی از فضای نمونه‌ای

اعمال روی پیشامد

B یا A : $A \cup B$
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 A و B : $A \cap B$
 A رخ دهد و B رخ ندهد: $A - B$
 $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
 A : متمم A' : $P(A') = 1 - P(A)$
دو پیشامد ناسازگار: $A \cap B = \emptyset$
 $P(A \cap B) = 0$
دو پیشامد مستقل: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

احتمال غیرهم‌شانسی

تعریف: حداقل دو پیشامد ساده، احتمال‌های نابرابر داشته باشند.
قوانین: S : فضای نمونه‌ای و A : پیشامد فرضی
۱) $0 \leq P(A) \leq 1$ ۲) $P(S) = 1$
۳) $P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k)$
 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$

احتمال شرطی

تعریف: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
قوانین: تمام قوانین احتمالات ساده اینجا هم برقراره.
مثال ۱: $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$
مثال ۲: $P(A'|B) = 1 - P(A|B)$

قانون ضرب احتمال

دو تایی: $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$
سه تایی: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1 \cap A_2))$

قانون احتمال کل

نمودار درختی
$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n) = \sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)$$

قانون بیز

روش اول: $P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$
روش دوم (تغییر مخرج): $P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{k=1}^n P(B_k)P(A|B_k)}$

پیشامدهای مستقل

۲ پیشامد: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
۳ پیشامد:
۱) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ۲) $P(A \cap C) = P(A)P(C)$
۳) $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ ۴) $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$
 n پیشامد مستقل: احتمال اشتراک هر تعداد از پیشامدهای $A_1, A_2, \dots, A_n$ برابر با حاصل ضرب احتمال آن‌هاست.



